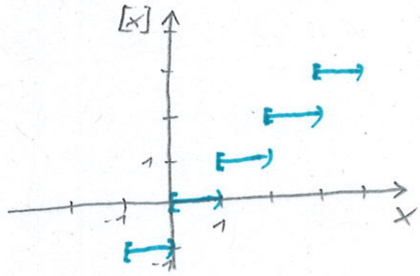
Übung (08.11.22)

1) Reelle Zahlen

Satz: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ex. genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$.
Schreibe $[x] := k$. „x abgerundet"
$[\cdot]$ heißt Gaußklammer. auch: $\lfloor \cdot \rfloor$

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$.
Def. $M := \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$. Dann gilt $M \neq \emptyset$, denn:
Ang. $M = \emptyset$. Dann gilt $z > x$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, insb. $-n > x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $\mathbb{N}$ nach oben durch $-x$ beschränkt $\lightning$ ($\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschr. S. 1.3 b))

Da $\emptyset \neq M$ nach oben durch x beschr. ist, ex. $k := \sup M$ und $k \in \mathbb{Z}$.
Da $k+1 \notin M$, gilt $k \leq x < k+1$



Bsp.: $\sqrt{2} \approx 1,4$. $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\sqrt{2}] = -2$.

Satz 1.5:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ex. $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Bew.:
Da $y - x > 0$, ex. nach Satz 1.3 c) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y-x}$. Dann gilt
$y - x > \frac{1}{n}$ bzw. $x + \frac{1}{n} < y$.

Wähle $m := [nx] \in \mathbb{Z}$, d.h. $m \leq nx < m+1$. Damit folgt:

$$\frac{m}{n} \leq x < \underbrace{\frac{m+1}{n}}_{=: q \in \mathbb{Q}} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

$\boxtimes$

Hilfssatz 1.6:
Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$.

Bew.:
Mit vollständiger Induktion.

IA ($n = 1$): Es gilt: $x \leq y \Leftrightarrow x^1 \leq y^1$.

IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$.

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$:

„$\Rightarrow$": Es sei $x \leq y$. Dann: $x^{n+1} = x \cdot x^n \overset{(IV)}{\leq} x \cdot y^n \leq y \cdot y^n = y^{n+1}$.

„$\Leftarrow$": Es gilt $(x^{n+1} \leq y^{n+1} \Rightarrow x \leq y) \Leftrightarrow (x > y \Rightarrow x^{n+1} > y^{n+1})$.

Es gelte also $x > y$. Insbesondere gilt $y \leq x$ und damit nach Teil „$\Rightarrow$" auch $y^{n+1} \leq x^{n+1}$.

Ang. $y^{n+1} = x^{n+1}$. Dann gilt $y = \sqrt[n+1]{y^{n+1}} = \sqrt[n+1]{x^{n+1}} = x$ ↯

Also gilt $y^{n+1} < x^{n+1}$.

$\blacksquare$

<u>Binomischer Lehrsatz:</u>

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

⌈ Erinnerung: $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, $0! = 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Binomialkoeffizient ⌋

<u>Bew.:</u>

Mit vollst. Induktion.

IA $(n=0)$: Es gilt $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$.

IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Es gilt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{(IV)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}$$

Indexshift: $\tilde{k} = k+1 \Leftrightarrow k = \tilde{k} - 1$

$$= \sum_{\tilde{k}=1}^{n+1} \binom{n}{\tilde{k}-1} a^{n+1-\tilde{k}} b^{\tilde{k}}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^0 b^{n+1}$$

$$= \overbrace{\binom{n+1}{0}}^{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k} b^k + \overbrace{\binom{n+1}{n+1}}^{=1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$\blacksquare$

2) Folgen und Konvergenz

Def. (Folge): Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Funktion $a: \mathbb{N} \to X$ heißt eine Folge in X. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine reelle Folge.

Schreibweise: (a_n), $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Def. (beschränkt): Es sei (a_n) eine reelle Folge.
(a_n) heißt (nach $\substack{\text{oben}\\ \text{unten}}$) beschränkt, wenn die Menge $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (nach $\substack{\text{oben}\\ \text{unten}}$) beschränkt ist.
Schreibe $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup M$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf M$,
sofern sup bzw. inf. existieren.

Def. (Konvergenz): Es sei (a_n) eine reelle Folge.

- (a_n) heißt konvergent mit GW $a \in \mathbb{R}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Schreibe $a_n \to a \; (n \to \infty)$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

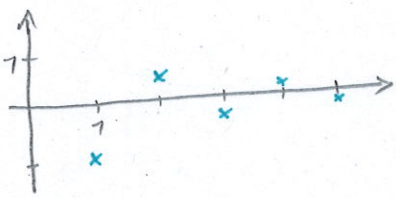
- (a_n) heißt divergent, wenn (a_n) nicht konvergiert.

Bsp.: a) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Beh.: $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

Bew.:
Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.3 c) ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.
Damit gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 0| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$



b) $a_n := \sqrt{n^2+1} - n$

Beh.: $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

Bew.:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \leq a_n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \leq \frac{1}{n}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

c) Es sei $q \in \mathbb{Q}$ und $a_n := n^q$ $(n \in \mathbb{N})$.

Beh.:

$$a_n \begin{cases} \text{(nach oben) unbeschr.} & , q > 0, \\ \xrightarrow{n\to\infty} 1 & , q = 0, \\ \xrightarrow{n\to\infty} 0 & , q < 0. \end{cases}$$

Bew.:

Fall 1: Es sei $q > 0$.

Sei $S > 0$ bel. Dann ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $n > S^{\frac{1}{q}}$. Es folgt

$a_n = n^q > (S^{1/q})^q = S$. Also ist S keine OS für (a_n)

d.h. (a_n) ist unbeschr., d.h. (a_n) divergiert.

Fall 2: Es sei $q = 0$. Dann ist $a_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Fall 3: Es sei $q < 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \varepsilon^{1/q}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$:

$$n^q \leq n_0^q < (\varepsilon^{\frac{1}{q}})^q = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

Satz 2.1:

Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann ist (a_n) beschränkt.

Bem.: Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

$a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $|a_n| = 1$, d.h. (a_n) ist beschr.

aber: (a_n) divergiert.