Übung (15.11.22)

1) Folgen

Def. (Monotonie): Es sei (a_n) eine reelle Folge.

- (a_n) heißt monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} a_n$

- (a_n) heißt streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} a_n$

- (a_n) heißt (streng) monoton $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist (streng) monoton wachsend oder fallend.

Satz (Monotoniekriterium)

a) Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

b) Die Folge (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

⚠ zuerst Rechenregeln

Bsp.:

- Es sei (a_n) eine reelle Folge gegeben durch $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \frac{2a_n}{a_n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Beh.: $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

Bew.:

Wir zeigen zunächst induktiv, dass $0 < a_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

IA $(n=1)$: $0 < a_1 = 1 \leq 1$.

IV: Für festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $0 < a_n \leq 1$.

IS $(n \leadsto n+1)$: Es gilt $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+3} \overset{(IV)}{>} 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+3} \leq 1 \iff a_n + 3 \geq 2a_n \iff a_n \leq 3.$$

Letzteres ist nach (IV) wahr.

Weiter ist (a_n) monoton fallend, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{2a_n}{a_n+3} \leq a_n \iff 2a_n \leq a_n^2 + 3a_n \iff a_n^2 + a_n \geq 0.$$

Wegen $a_n \geq 0$ ist die letzte Ungleichung erfüllt.

Nach dem Monotoniekriterium konvergiert (a_n). Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt: $a \geq 0$ und

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n}{a_n+3} = \frac{2a}{a+3} \quad \text{(Rechenregel)}$$

$$\iff a^2 + 3a = 2a \iff a(a+1) = 0 \overset{a\geq 0}{\iff} a = 0.$$

$\boxtimes$

Rechenregeln für Grenzwerte

Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n\to\infty)$. Dann gelten:

a) $|a_n| \to |a|$

b) $a_n + b_n \to a+b$

c) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

d) Ist $b \neq 0$, dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N$: $b_n \neq 0$ und

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=N}^{\infty} \to \frac{a}{b}$$

e) Ist $a_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a \leq b$.

f) „Sandwichkriterium": sei (c_n) eine reelle Folge und gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Gelte weiter $a = b$. Dann gilt $c_n \to a$.

g) Sei $p \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$ $(n\to\infty)$.

$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n\to\infty)$

$x > 0, \quad \sqrt[n]{x} \to 1 \quad (n\to\infty)$

Bsp.: Sei $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ (Bsp. 2.9 aus VL)

Beh.: Es gilt $2 \le a_n < a_{n+1} < 3 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Erinnerung: Für $x \ge -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \ge 1+nx$ (Bernoulli'sche Ungl.)

für $x \in [-1,\infty)\setminus\{0\}$, $n \ge 2$ gilt: $(1+x)^n > 1+nx$ $(nx^2 > 0)$

Bew.:

Zunächst gilt: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Weiter gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n}\left(\frac{(n+2)n \overset{+1-1}{}}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{>} \frac{n+1}{n}\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1-1}{n+1} = 1,$$

$-\frac{1}{(n+1)^2} \ge -1$, $\ne 0$

d.h. $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (a_n) ist streng monoton wachsend.

Außerdem gilt $k! \ge 2^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. (Induktion). Damit folgt:

$$a_n \overset{(VL)}{\le} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{1-k} = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{-\ell}$$

$$\overset{\text{geom. Summenformel (Bsp. 2.6)}}{=} 1 + \frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}} = 1 + 2\underbrace{\left(1-2^{-n}\right)}_{<1} < 1+2 = 3.$$

$\Rightarrow$ Beh. $\boxtimes$

Da (a_n) mon. wachsend und nach oben beschr. ist, konv. (a_n) nach dem Monotoniekriterium. Man definiert $e := \lim_{n\to\infty} a_n$, es gilt $2 < e < 3$.

$e \approx 2{,}718$ Eulersche Zahl

Bsp.: $a_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Beh.: $a_n \to \frac{1}{e}$ $(n\to\infty)$.

Bew.:

Es gilt: $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, d.h.

$$a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\Big]^{-1} \longrightarrow 1\cdot e^{-1}.$$

nach den Rechenregeln

$\boxtimes$

- $a_n := \sqrt{4n^2+n-5} - 2n$ $(n\in\mathbb{N})$

Beh.: $a_n \to \frac{1}{4}$ $(n\in\mathbb{N})$

Bew.: Es gilt

$$a_n = \left(\sqrt{4n^2+n-5}-2n\right)\cdot\frac{\sqrt{4n^2+n-5}+2n}{\sqrt{4n^2+n-5}+2n} = \frac{4n^2+n-5-4n^2}{\sqrt{4n^2+n-5}+2n}$$

$$= \frac{1-\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$ (nach den Rechenregeln)

$\boxtimes$

- $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Beh.: $a_n \longrightarrow 1$ $(n\to\infty)$

Bew.: Es gilt

$$1 \geq a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Nach dem Sandwichtheorem konv. (a_n) gegen 1.

Alternativ: Es gilt

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e^{-1}} \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot e^{-1} = 1.$$

• $a_n = \sqrt[n]{3 + 2\frac{n-1}{n+1}}$

Beh.: $a_n \to 1 \quad (n \to \infty)$

Bew.:

Es gilt

$$3 \leq 3 + 2 \cdot \frac{n-1}{n+1} \leq 3 + 2 \cdot \frac{n+1}{n+1} = 5,$$

und damit

$$\sqrt[n]{3} \leq a_n \leq \sqrt[n]{5}.$$

Nach VL konv. $\sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{5} \to 1 \quad (n \to \infty)$, damit konv. (a_n) nach dem Sandwichkriterium auch gegen 1.

$\boxtimes$