Übung (22.11.22)

Def. (Teilfolge)

Es sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, \dots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Für $k \in \mathbb{N}$ setze $b_k := a_{n_k}$. Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ Teilfolge (TF) von (a_n).

Def. (Häufungswert)

Es sei (a_n) eine reelle Folge. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert (HW) von (a_n), wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ex. mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$.
Schreibe

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist HW von } (a_n)\}.$$

Satz 2.10

Es sei (a_n) eine reelle Folge, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\alpha \in H(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Satz:

Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge.

a) „Bolzano-Weierstraß": $H(a_n) \neq \emptyset$.

b) $H(a_n)$ ist beschränkt und es ex. $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$. Schreibe

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \max H(a_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min H(a_n)$$

Lemma:

Es sei (a_n) eine reelle Folge und für $j \in \{1, \dots, M\}$ sei $(a_{n_k^{(j)}})_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge. Weiter sollen für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ ex. mit $n = n_k^{(j)}$. Dann gilt

$$H(a_n) = H(a_{n_k^{(1)}}) \cup \dots \cup H(a_{n_k^{(M)}}).$$

Bew.:

„$\supseteq$": Es sei $\alpha \in H(a_{n_k^{(1)}}) \cup \dots \cup H(a_{n_k^{(M)}})$. Dann ex. ein $j \in \{1,\dots,M\}$ mit $\alpha \in H(a_{n_k^{(j)}})$, und nach Definition eine Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}^{(j)}})_{\ell=1}^\infty$ mit $a_{n_{k_\ell}^{(j)}} \longrightarrow \alpha$ $(\ell \to \infty)$. Da $(a_{n_{k_\ell}^{(j)}})_{\ell=1}^\infty$ eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt $\alpha \in H(a_n)$.

„$\subseteq$": Es sei $\alpha \in H(a_n)$. Dann ex. eine Teilfolge $(a_{n_m})_{m=1}^\infty$ von (a_n) mit $a_{n_m} \to \alpha$ $(m \to \infty)$. Nach Voraussetzung lassen sich fast alle n_m schreiben als $n_m = n_k^{(j)}$ für geeignete $j \in \{1,\dots,M\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dabei kommt (mindestens) ein j unendlich oft vor. Also existieren ein $j \in \{1,\dots,M\}$ und Teilfolgen $(n_{m_\ell})_\ell$, $(n_{k_\ell}^{(j)})_\ell$ mit $n_{m_\ell} = n_{k_\ell}^{(j)}$ $(\ell \in \mathbb{N})$.
Dann folgt

$$\alpha = \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{m_\ell}} = \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}^{(j)}} \in H(a_{n_k^{(j)}}).$$

$\boxtimes$

Bsp.:

- $$a_n := \frac{(1+(-1)^n)n+1}{4n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

  Beh.: Es gelten $H(a_n) = \{0, \frac{1}{2}\}$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

  Bew.:

  Wir betrachten die Teilfolgen $(a_{2k})_{k=1}^\infty$ und $(a_{2k-1})_{k=1}^\infty$. Dann gilt:

$$a_{2k} = \frac{(1+(-1)^{2k})2k+1}{8k+3} = \frac{4k+1}{8k+3} = \frac{4+\frac{1}{k}}{8+\frac{3}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4+0}{8+0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$a_{2k-1} = \frac{(1+(-1)^{2k-1})(2k-1)+1}{4(2k-1)+3} = \frac{1}{8k-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

  Alle Folgenglieder von (a_n) sind in einer der beiden Teilfolgen enthalten, daher folgt mit obigem Lemma:

$$H(a_n) = H((a_{2k})) \cup H((a_{2k-1})) = \{0, \tfrac{1}{2}\}.$$

  Insbesondere sind beide Teilfolgen und damit auch (a_n) beschränkt.

  $\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

$\boxtimes$

Satz 2.15: Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann gilt:

c) $\forall \alpha \geq 0: \limsup\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

d) $\limsup\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Bew.:

c): Es sei $\alpha \geq 0$:

„$\leq$": Def. $b_n := \alpha a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, (b_n) ist beschränkt und daher ex. $b := \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$. Nach Def. ex. eine TF $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (b_n) mit

$$b = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (\alpha a_{n_k}).$$

Da $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ beschränkt ist, ex. nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente TF $(a_{n_{k_\ell}})_\ell$ mit $\lim\limits_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Damit folgt

$$\limsup_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \lim_{\ell\to\infty} (\alpha a_{n_{k_\ell}}) = \alpha \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} \leq \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

„$\geq$": Es sei $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ die TF von (a_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dann gilt:

$$\alpha \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \alpha a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha a_n).$$

$\boxtimes$

d) Es gilt: $c \in H(a_n) \Leftrightarrow -c \in H(-a_n)$,

$\ulcorner$ $c \in H(a_n) \Leftrightarrow \exists$ TF $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} c$ $\Leftrightarrow \exists$ TF $(a_{n_k})_k$ mit $-a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} -c$ $\Leftrightarrow -c \in H(-a_n)$ $\lrcorner$

also gilt: $H(-a_n) = -H(a_n)$, und somit

$$\limsup_{n\to\infty} (-a_n) = \max \underbrace{H(-a_n)}_{=-H(a_n)} = -\min H(a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

$\boxtimes$

Bsp.:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \begin{cases} 1 + 2^{-n} & , n = 3k \quad (k \in \mathbb{N}) \\ 2 + \frac{n^2+1}{n} & , n = 3k-1 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ (1 + \frac{1}{n})^{-2n} & , n = 3k-2 \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$

Beh.: $H(a_n) = \{ \frac{1}{e^2}, 1 \}$ $\qquad$ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nach VL nicht definiert

Bew.:

Wir betrachten die Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k-1}), (a_{3k-2}).

Es gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{3k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = 1 + \left(\frac{1}{8}\right)^{k} \xrightarrow{k\to\infty} 1 + 0 = 1$$

$$a_{3k-1} = 2 + \frac{(3k-1)^2+1}{3k-1} \geq 2 + \frac{(3k-1)^2}{3k-1} = 3k+1,$$

daraus folgt, dass (a_{3k-1}) keine beschr. TF besitzt, insb. gilt $H(a_{3k-1}) = \emptyset$.

$$a_{3k-2} = \left(\left(1 + \frac{1}{3k-2}\right)^{3k-2}\right)^{-2} \xrightarrow{k\to\infty} e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Da alle Folgenglieder in den Teilfolgen enthalten sind, folgt mit dem Lemma:

$$H(a_n) = H(a_{3k}) \cup H(a_{3k-1}) \cup H(a_{3k-2}) = \{ \tfrac{1}{e^2}, 1 \}.$$

$\boxtimes$

- $a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Beh.: $H(a_n) = \{ e^{-3/2}, e^{3/2} \}$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-3/2}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = e^{3/2}$

Bew.:

Wir betrachten die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}). Dann gilt

$$a_{2k} = \left(1 + \frac{(-1)^{2k}}{4k}\right)^{6k} = \Big[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k}}_{\xrightarrow{k\to\infty} e}\Big]^{3/2} \xrightarrow{k\to\infty} e^{3/2}$$

$$a_{2k-1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2k-1}}{2(2k-1)}\right)^{3(2k-1)} = \left(1 - \frac{1}{4k-2}\right)^{6k-3} = \left(\frac{4k-3}{4k-2}\right)^{6k-3}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{4k-2}{4k-3}\right)^{6k-3}} = \frac{1}{\left(\frac{4k-3+1}{4k-3}\right)^{6k-3}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4k-3}\right)^{6k-3}}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4k-3}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{4k-3}\right)^{6k-\frac{9}{2}}} = \frac{1}{\underbrace{\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{4k-3}}_{\to 0}\Big)^{3/2}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 1} \Big[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{4k-3}\right)^{4k-3}}_{\xrightarrow{k\to\infty} e}\Big]^{3/2}}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{1 \cdot e^{3/2}} = \frac{1}{e^{3/2}} .$$

Da alle Folgenglieder in einer der beiden Teilfolgen enthalten sind, folgt mit dem Lemma:

$$H(a_n) = \{ e^{-3/2}, e^{3/2} \}.$$

Weiter gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-3/2}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = e^{3/2}$.