Übung (29.11.22)

Def. (Reihe)

Es sei (a_n) eine Folge. Setze $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Die Folge (s_n) heißt **Reihe**, schreibe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := (s_n)$.

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, d.h. konv. die Folge (s_n), so wird der Grenzwert als **Reihenwert** bezeichnet. Schreibe dafür auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

s_n heißt n-te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Def. (absolute Konvergenz)

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut } :\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konv.}$$

Bsp.:

- Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. $\Longleftrightarrow |x| < 1$

  I.d.F. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

- Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

  Beh.: Die Reihe divergiert

  Bew.: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

  $$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & , n \text{ ungerade} \\ 1 & , n \text{ gerade} \end{cases}$$

  d.h. $s_{2\ell} = 1 \to 1 \quad (\ell \to \infty)$

  $s_{2\ell-1} = 0 \to 0 \quad (\ell \to \infty)$,

  (s_n) hat also 2 Häufungswerte, nämlich 0 und 1. Somit divergiert die Folge (s_n), d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergiert. $\square$

- $\sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n}$

<u>Beh.:</u> Die Reihe konv. und hat den Reihenwert $\frac{1}{4}$.

<u>Bew.:</u>

Als geometrische Reihe ist die Reihe konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right)}_{= \frac{7}{4}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{7}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

$\boxtimes$

<u>Satz:</u> Es sei (a_n) eine Folge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. abs. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow$ (a_n) ist eine Nullfolge.

<u>Konvergenzkriterien:</u> Es seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen.

- Monotoniekriterium: Ist $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und (s_n) beschränkt, so konv. $\sum_{n=1} a_n$.
- Leibnizkriterium: Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so ist
  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ konv.}$$
- Majorantenkriterium: Ist $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent,
  so konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- Minorantenkriterium: Gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent,
  so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Bsp.:</u>

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$

<u>Beh.:</u> Die Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

<u>Bew.:</u>

Setze $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt

$$b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3}} \Leftrightarrow \sqrt{n+3} \leq \sqrt{n+4}$$

$$\Leftrightarrow n+3 \leq n+4 \Leftrightarrow 3 \leq 4 \quad \checkmark$$

Weiter gilt: $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

d.h. (b_n) ist eine monoton fallende Nullfolge. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ nach dem Leibnizkriterium.

Für $n \geq 3$ gilt aber $\quad (a_n := (-1)^{n+1} b_n)$

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Nach VL divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nach dem Minorantenkriterium.

$\Rightarrow$ Beh.

$\boxtimes$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Beh.: Die Reihe divergiert.

Bew.:

Es gilt: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$,

d.h. $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ ist keine Nullfolge und somit divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

$\boxtimes$

Cauchy'scher Verdichtungssatz

Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}}_{= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots} \text{ konv.}$$

- Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha > 0$

Beh.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv. $\iff \alpha > 1$.

Bew.:

Mit dem Cauchyschen Verdichtungssatz folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konv.} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} \text{ konv.}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k \text{ konv.}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{\iff} 2^{1-\alpha} < 1 \iff 1-\alpha < 0$$

$$\iff \alpha > 1.$$

$\boxtimes$

- Mithilfe dieses Satzes sieht man noch einmal, dass die harmonische Reihe divergiert, denn:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \quad \text{divergiert.}$$

Bsp.:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

Beh.: Die Reihe konvergiert absolut.

Bew.:

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \right| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konv. daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$ absolut.

$\boxtimes$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$

Beh.: Die Reihe divergiert.

Bew.:

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\left| (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n} \right| = \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n} \geq \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} > 0,$$

d.h. $\left((-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}\right)$ bildet keine Nullfolge, somit divergiert die Reihe.

$\boxtimes$