Übung (06.12.22)

<u>Konvergenzkriterien:</u> Es sei (a_n) eine Folge.

- Wurzelkriterium: Setze $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ $(n \in \mathbb{N})$
  - a) Ist (c_n) unbeschr., so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
  - b) Ist (c_n) beschränkt, setze $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
    - (i) Falls $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
    - (ii) Falls $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

    im Fall $\alpha = 1$ ist keine Aussage möglich

- Quotientenkriterium:

  Es sei $a_n \neq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $(n \in \mathbb{N})$.
  - a) Ist $c_n \geq 1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
  - b) Ist (c_n) beschränkt, gilt:
    - (i) Falls $\liminf_{n\to\infty} c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
    - (ii) Falls $\limsup_{n\to\infty} c_n < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

<u>Bsp.:</u>

- Setze $a_n := (1 + (-1)^n)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n$

  <u>Beh.:</u> Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut.

  <u>Bew.:</u>

  Es gilt $a_n = \begin{cases} 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade.} \end{cases}$

  Damit folgt:

$$\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \underbrace{\sqrt[2k]{2}}_{=(\sqrt{2})^{1/k} \xrightarrow{k\to\infty} 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0 \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

$\Rightarrow$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ hat 2 Häufungswerte, $H\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

Insbesondere gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$.

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

$\boxtimes$

- Es sei $a_n := \frac{n!}{n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Beh.:</u> Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut.

<u>Bew.:</u>

Es gilt
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1.$$

Es gilt somit $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$, also ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

Die Behauptung folgt ebenso aus dem Wurzelkriterium, denn:
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e},$$
vgl. A23 (ii)

d.h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e} < 1$.

$\boxtimes$

<u>Definition</u> (Cauchyprodukt)

Es seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze
$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$
$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

<u>Satz:</u>

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Dann gilt für ihr Cauchyprodukt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konv. absolut und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

- Es seien $a_n := \left(1 + \sqrt{n}\,\sqrt[3]{n}\,\sqrt[4]{n}\right)^{-1}$, $b_n := \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2+n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

<u>Beh.:</u> Das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ konv. absolut.

<u>Bew.:</u>

Wir zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren. Dann folgt die Behauptung aus obigem Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| = \frac{1}{1 + n^{1/2}\, n^{1/3}\, n^{1/4}} = \frac{1}{1 + n^{13/12}} \leq \frac{1}{n^{13/12}}.$$

Wegen $\frac{13}{12} > 1$ konv. die Reihe $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/12}}$. Nach dem Majorantenkriterium konv. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Weiter gilt

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} e} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot e = 0 < 1,$$

d.h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0 < 1$, nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut.

$\boxtimes$

<u>Definition</u> (Potenzreihe)

Es sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt Potenzreihe (PR). Setze

$$\varrho := \begin{cases} \infty & \text{, falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschr.} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt $r := \frac{1}{\varrho}$ der Konvergenzradius (KR) von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, wobei $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$.

Satz:

Es sei r der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Dann gilt:

a) Ist $r=0$, so konv. die PR nur für $x=x_0$.

b) Ist $r=\infty$, so konv. die PR absolut für jedes $x\in\mathbb{R}$.

c) Ist $r\in(0,\infty)$, so gilt (für $x\in\mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \begin{cases} \text{konv. abs.} & , |x-x_0|<r \\ \text{divergiert} & , |x-x_0|>r \\ \text{keine Aussage} & , |x-x_0|=r. \end{cases}$$

Bsp.:

- Exponentialfunktion $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ hat KR ∞.

- Sinus / Cosinus: $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

  $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ haben KR ∞.

- Cosinus Hyperbolicus: $\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

  Beh.: cosh hat KR $r=\infty$.

  Bew.:

  Es sei $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n!} & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade.} \end{cases}$

  Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Es gilt:

$$\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \underbrace{\frac{\cancel{1}\, 2k}{\sqrt[2k]{(2k)!}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2k}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} \xrightarrow{k\to\infty} e\cdot 0 = 0$$

$$\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

  d.h. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Rightarrow r=\infty$

  die PR konv. also für alle $x\in\mathbb{R}$ absolut. $\boxtimes$

- Sinus Hyperbolicus: $\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

  hat ebenfalls KR $r=\infty$.

Bsp.: Entwickle $\frac{E(x)}{x-4}$ in eine PR um $x_0=0$. Für welche x konv. diese PR?

Beh.: Es gilt $\frac{E(x)}{x-4} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{-1}{4^{k+1}}\right]x^n$,

diese PR hat KR 4 und konvergiert genau für $x\in(-4,4)$.

Bew.:

Es gilt $E(x) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$ mit KR ∞, und

$$\frac{1}{x-4} = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{-1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^k \quad \text{mit KR } 4$$

Insb. konv. die PR $-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{4^k} = \underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{k+1}}x^k}$.

Für $x\in(-4,4)$ konvergiert das CP der beiden Potenzreihen (Satz über das CP) und es gilt:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{-1}{4^{k+1}}x^n. \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

Für $x\in(-4,4)$ gilt also

$$\frac{E(x)}{x-4} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{-1}{4^{k+1}}\right)}_{=:a_n}x^n.$$

Weiter gilt:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{-1}{4^{n-k+1}} = \frac{-1}{4^{n+1}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$$

d.h. $$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{4}}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}}}_{\underbrace{\sqrt[n]{1}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1}\le\ldots\le\underbrace{\sqrt[n]{E(4)}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

d.h. $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}$

also ist $r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{1/4} = 4$.

Die PR $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ div. also für $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|>4$ und konv. abs. für $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<4$.

Für $x=\pm 4$ div. die PR, denn es gilt (für $n\in\mathbb{N}_0$):

$$|a_n x^n| = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{|-1|}{4^{n-k+1}}\cdot 4^n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4}E(4)\neq 0,$$

d.h. $(a_n x^n)_{n=0}^{\infty}$ ist keine Nullfolge, somit divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

$\square$