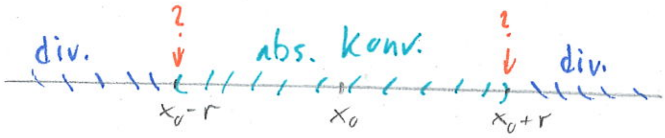
Übung (13.12.22)

Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n , \qquad \varrho := \begin{cases} \infty & , \ (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ unbeschr.} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} & , \ (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschr.} \end{cases}$$

Konvergenzradius $$r := \begin{cases} 0 & , \ \varrho = \infty \\ \infty & , \ \varrho = 0 \\ \frac{1}{\varrho} & , \ \varrho \in (0,\infty). \end{cases}$$



Bsp.:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (x-1)^n$

Beh.: Die PR hat den KR $1/2$, konvergiert für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ und divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > \frac{1}{2}$.

Bew.:

Setze $a_n := \frac{2^n}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

d.h. die PR konvergiert abs. für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \frac{1}{2}$ $(\Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| > \frac{1}{2}$.

Es bleibt die Konvergenz in $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$ zu prüfen:

$x = \frac{1}{2}$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ $\qquad$ konv. absolut

$x = \frac{3}{2}$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \cdot (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\qquad$ konv. absolut

$\blacksquare$

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} x^n$

Beh.: Die PR hat den KR 1, konvergiert für $x \in [-1,1)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1)$.

Bew.:

Setze $a_n := \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt[4]{n}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1}} = 1$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \rho = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\rho} = 1$$

d.h. die PR konv. abs. für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $x = 1$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$ divergiert, da $1/4 < 1$.

Für $x = -1$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, denn:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{n} \leq \sqrt[4]{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

d.h. $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Die Reihe konv. aber nicht absolut.

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Erinnerung (Gaußklammer):

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist durch $[x] \in \mathbb{Z}$ und $[x] \leq x < [x]+1$ die Zahl $[x]$ eindeutig bestimmt und heißt Gaußklammer von x.

q-adische Entwicklung

Es seien $a \geq 0$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$.

Setze

$$z_0 := [a]$$
$$z_1 := [(a-z_0)q]$$
$$\vdots$$
$$z_{n+1} := \left[\left(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \dots - \frac{z_n}{q^n}\right) q^{n+1}\right] \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Äquivalente Formulierung:

$$z_0 := [a], \quad a_0 := a - z_0$$
$$z_{n+1} := [a_n q], \quad a_{n+1} := a_n q - z_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$\rightsquigarrow$ ergibt Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$(*) \begin{cases} z_0 \in \mathbb{N}_0, \; z_n \in \{0, \dots, q-1\} & (n \in \mathbb{N}) \\ z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n} & (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

Satz:

Die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist durch $(*)$ eindeutig bestimmt und heißt q-adische Entwicklung von a.

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots = (z_0, z_1 z_2 z_3 \dots)_q$$

Aus $(*)$ folgen

- $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$
- $z_n \neq q-1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$

Erinnerung: $1 = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Dezimalentwicklung von } 1}}{1{,}000\dots} = 0{,}999\dots$

Die Darstellung $0{,}999\dots$ genügt nicht $(*)$.

Bsp.: Es seien $q = 3$, $a = \frac{25}{24}$.

Beh.: Die 3-adische Entwicklung von a ist gegeben durch

$$1{,}0\overline{01}_3 = (1{,}0010101\ldots)_3$$

Bew.:

Es gilt:

$$z_0 := [a] = 1, \quad a_0 := a - z_0 = \frac{1}{24},$$

$$z_1 := [3 \cdot a_0] = \left[\frac{1}{8}\right] = 0, \quad a_1 := \frac{1}{8} - z_1 = \frac{1}{8},$$

$$z_2 := [3 \cdot a_1] = \left[\frac{3}{8}\right] = 0, \quad a_2 := \frac{3}{8} - 0 = \frac{3}{8},$$

$$z_3 := [3 \cdot a_2] = \left[\frac{9}{8}\right] = 1, \quad a_3 := \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

Beobachtung: Es gilt $a_1 = a_3$. Damit ist auch

$$z_4 = [3 \cdot a_3] = [3 \cdot a_1] = z_2, \quad a_4 = a_2$$

$$z_5 = z_3, \quad a_5 = a_3$$

$$\vdots$$

$\rightsquigarrow$ Die Ziffern wiederholen sich periodisch, es gilt also

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots = (1{,}0010101\ldots)_3 = 1{,}0\overline{01}_3.$$

Bew. d. Eindeutigkeitssatzes:

Die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ erfülle (*). Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$q^n z_0 + q^{n-1} z_1 + \ldots + q z_{n-1} + z_n \leq q^n a$$

$$< \underbrace{q^n z_0 + q^{n-1} z_1 + \ldots + q z_{n-1} + z_n}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

also ist $q^n z_0 + q^{n-1} z_1 + \ldots q z_{n-1} + z_n = [q^n a]$.

Für $n = 0$ ist $z_0 = [a]$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} & q^n z_0 + q^{n-1} z_1 + \ldots + q z_{n-1} + z_n \\ &= q (q^{n-1} z_0 + q^{n-2} z_1 + \ldots + q z_{n-2} + z_{n-1}) + z_n \\ &= q [q^{n-1} a] + z_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z_n = [q^n a] - q [q^{n-1} a].$$

Grenzwerte bei Funktionen

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Def. (Häufungspunkt)

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt Häufungspunkt (HP) von D, wenn eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Satz: Es gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$x_0 \text{ ist HP von } D \iff \forall \varepsilon > 0: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Def.:

Es seien $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein HP von D.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ex. $\iff$ $\exists\, a \in \mathbb{R}$, sodass für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to a$ $(n \to \infty)$.

I.d.F. ist a eindeutig bestimmt.

Schreibweise: $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Bsp.:

- Existiert der GW $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$?

Beh.: Der GW ex. und ist $\frac{4}{3}$.

Bew.:

$f(x) := \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ ist definiert für alle $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Wir faktorisieren den Zähler und Nenner von f und erhalten:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$
$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Es sei nun (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 1$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:

$$f(x_n) = \frac{(x_n^2 + 1)(x_n + 1)(x_n - 1)}{(x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1)} = \frac{(x_n^2 + 1)(x_n + 1)}{x_n^2 + x_n + 1}$$
$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{(1 + 1)(1 + 1)}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3},$$

d.h. der GW ex., $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{3}$.

- $\lim_{x \to 0} x^2 \left[\frac{1}{x}\right]$

Beh.: Der LW ex. und ist 0.

Bew.:

Der Ausdruck ist definiert für alle $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für alle $x \in D$ gilt: $[x] \leq x \leq [x] + 1$, d.h. $x - 1 \leq [x] \leq x$

Insb. gilt: $\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$

Es sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$\underbrace{x_n - x_n^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} = x_n^2 \left(\frac{1}{x_n} - 1\right) \underset{x_n^2 \geq 0}{\leq} x_n^2 \left[\frac{1}{x_n}\right] \leq x_n^2 \cdot \frac{1}{x_n} = \underbrace{x_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$\Rightarrow$ $x_n^2 \left[\frac{1}{x_n}\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nach dem Sandwichkriterium

Somit gilt $\lim_{x \to 0} x^2 \left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

$\square$