Übung (20.12.22)

Grenzwerte bei Funktionen

Def.:
Es sei (x_n) eine reelle Folge.

- $x_n \to +\infty \ (n\to\infty) :\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$
- $x_n \to -\infty \ (n\to\infty) :\Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$

Sagen dann, (x_n) divergiert / konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Bem.: Es gilt

$$x_n \to \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix} (n\to\infty) \Leftrightarrow x_n \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \text{ f.f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \to 0 \ (n\to\infty)$$

Def.:
Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(*) Es existiere (mind.) eine Folge (x_n) in $D\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0 \ (n\to\infty)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in $D\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0 \ (n\to\infty)$ gilt: $f(x_n) \to a \ (n\to\infty)$.

Bem.: Es gilt

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ ist HP von } D, & x_0 \in \mathbb{R} \\ D \text{ ist nach oben unbeschr.}, & x_0 = \infty \\ D \text{ ist nach unten unbeschr.}, & x_0 = -\infty \end{cases}$$

Rechenregeln

Es seien $f, g, h: D \to \mathbb{R}$ Funktionen, $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erfülle (*), und es gelten $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Dann gelten:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha a \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = a + b \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} \text{ ist linear}$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) g(x) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$, falls $a \neq 0$
- $f \leq g \Rightarrow a \leq b$

- $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$

- $[f \le h \le g \wedge a = b] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = a.$

Bsp.:

- Beh.: $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{3/2} - x^{3/2}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$

  Bew.:
  Es sei (x_n) eine Folge in $(0,\infty)$, die uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert.
  Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(x_n+1)^{3/2} - x_n^{3/2}}{\sqrt{x_n}} = \frac{(x_n+1)^{3/2} - x_n^{3/2}}{\sqrt{x_n}} \cdot \frac{(x_n+1)^{3/2} + x_n^{3/2}}{(x_n+1)^{3/2} + x_n^{3/2}} = \frac{(x_n+1)^3 - x_n^3}{\sqrt{x_n}\left((x_n+1)^{3/2} + x_n^{3/2}\right)}$$

$$= \frac{3x_n^2 + 3x_n + 1}{\sqrt{x_n}\left((x_n+1)^{3/2} + x_n^{3/2}\right)} = \frac{3 + \frac{3}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}{\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{3/2} + 1^{3/2}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{3+0+0}{(1+0)^{3/2}+1} = \frac{3}{2}.$$

$\boxtimes$

- Beh.: $\lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^{5/2}} = \infty$.

  Bew.:
  Nach VL gilt: $\frac{E(x)}{x^3} \to \infty \quad (x\to\infty)$. Nun gilt $\frac{E(x)}{x^{5/2}} \ge \frac{E(x)}{x^3}$ für $x \ge 1$,
  sodass auch $\frac{E(x)}{x^{5/2}}$ für $x\to\infty$ gegen ∞ konvergiert.

$\boxtimes$

Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt in x_0 stetig $:\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n\to\infty)$

- f heißt auf D stetig $:\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig

  Schreibweise: $C(D) := C(D,\mathbb{R}) := \{g: D \to \mathbb{R} \mid g \text{ ist stetig auf } D\}$

- ε-δ-Charakterisierung:
  f ist stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Satz:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein HP von D. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Rechenregeln

a) Es seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- αf, $f+g$, $|f|$, $f \cdot g$ sind stetig in x_0
- falls $f(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}: \{x \in D : f(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

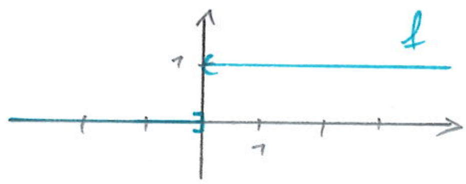
b) Es seien $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $g: \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 = f(x_0) \in \tilde{D}$.
Weiter gelte $f(D) \subseteq \tilde{D}$.
Dann ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig in x_0.

c) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt[k]{\cdot}: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.

d) Eine PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-y)^n$ mit KR r ist stetig auf $(y-r, y+r)$.

Bsp.:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$



Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und nicht stetig in 0.

Bew.:

Es sei $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := |x_0|$. Dann gilt $f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, also $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, d.h. f ist stetig in x_0.
Da $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt: f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Als nächstes zeigen wir, dass f in 0 nicht stetig ist:
Definiere die Folge (x_n) durch $x_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$,
aber $f(x_n) = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1 \neq 0 = f(0)$,
d.h. f ist nicht stetig in 0.

$\boxtimes$

- Bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f_\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} \alpha - x^2 & , x \in [0,1] \\ \frac{1}{x} & , x \in (1,\infty) \end{cases}$$

stetig ist.

<u>Beh.:</u> f_α ist stetig $\Leftrightarrow \alpha = 2$

<u>Bew.:</u>

f_α ist als Polynom auf $[0,1)$ stetig und mit den Rechenregeln auch auf $(1,\infty)$.

Es bleibt also noch die Stelle $x_0 = 1$ zu untersuchen:

Damit f_α in $x_0 = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x\to 1+} f_\alpha(x) = \lim_{x \to 1-} f_\alpha(x) = f_\alpha(1).$$

Es gilt

$$\lim_{x\to 1-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 1-} \alpha - x^2 = \alpha - 1 = f_\alpha(1)$$

und

$$\lim_{x\to 1+} f_\alpha(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \alpha = 2,$$

d.h. f_α ist in 1 genau dann stetig, wenn $\alpha = 2$.

$\Rightarrow$ Beh.

<u>Zwischenwertsatz</u>

Es seien $a<b$ und $f \in C([a,b])$,

$$y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}].$$

Dann ex. ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.