Übung (10.01.23)

Definition

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- f ist stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in D\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 : \forall y \in D:$
$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

- f ist gleichmäßig (glm.) stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x, y \in D:$
$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

- f ist Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow \exists L \geq 0\ \forall x, y \in D: |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

Zusammenhang: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \underset{\cancel{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow} f \text{ glm. stetig} \underset{\overset{\text{falls } D \text{ kompakt}}{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow} f \text{ stetig}$$

Bsp.:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$

Beh.: f ist nicht glm. stetig.

Bew.:

Es ist zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in \mathbb{R}: |x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Setze $\varepsilon := 1$ und sei $\delta > 0$. Wähle $x := \sqrt{\frac{2}{3\delta}}$ und $y := x + \frac{\delta}{2}$.

Dann gilt:
$$|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$
und
$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - (x + \tfrac{\delta}{2})^3| = |x^3 - (x^3 + \tfrac{3}{2}x^2\delta + \tfrac{3}{4}x\delta^2 + \tfrac{1}{8}\delta^3)|$$
$$= \frac{3}{2}x^2\delta + \underbrace{\frac{3}{4}x\delta^2 + \frac{\delta^3}{8}}_{\geq 0} \geq \frac{3}{2}x^2\delta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3\delta} \cdot \delta = 1 = \varepsilon,$$

d.h. f ist nicht glm. stetig. ☒

- $f: [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$

Beh.: f ist Lipschitz-stetig, also insb. auch glm. stetig.

Bew.:

Seien $x, y \in [-3,3]$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x-y|\,|x^2 + xy + y^2| \leq |x-y|\,(|x|^2 + |x||y| + |y|^2)$$

$$\overset{|x|,|y|\leq 3}{\leq} \underbrace{27}_{=:L} |x-y|.$$

$\boxtimes$

Definition:

Die Exponentialfunktion $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, injektiv und es gilt $E(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.
Die Umkehrfunktion $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\log(x) := E^{-1}(x)$ heißt Logarithmus, wächst strikt monoton und ist stetig.
Es gelten:

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty.$$

Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$a^x := E(x\log(a)) = e^{x\log(a)}.$$

Beh.: $\log$ ist nicht glm. stetig, aber $\log|_{[\varepsilon,\infty)}$ ist Lipschitz-stetig für $\varepsilon > 0$.

Bew.:

1) Übung

2) Seien $x, y \in [\varepsilon, \infty)$, o.B.d.A. sei $x \geq y$ (ansonsten vertausche x und y)

Setze $\tilde{x} := \log x$, $\tilde{y} := \log y$. Dann gilt ($L \geq 0$)

$$|\log x - \log y| \leq L|x-y|$$

$$\Leftrightarrow |\tilde{x} - \tilde{y}| \leq L|e^{\tilde{x}} - e^{\tilde{y}}| = L e^{\tilde{y}} |e^{\tilde{x}-\tilde{y}} - 1|.$$

Beachte: Für $z \geq 0$ gilt: $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \geq 1 + z$.

Wähle $L := \frac{1}{\varepsilon}$. Damit folgt:

$$L|x-y| = L e^{\tilde{y}} |e^{\tilde{x}-\tilde{y}} - 1| \geq \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{y}_{\geq \varepsilon} (1 + \tilde{x} - \tilde{y} - 1)$$

$$\geq \tilde{x} - \tilde{y} = |\tilde{x} - \tilde{y}| = |\log x - \log y|,$$

d.h. $\log|_{[\varepsilon, \infty)}$ ist Lipschitz-stetig.

$\boxtimes$

Es sei $\alpha > 0$

• **Beh.:** $\lim_{x \to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \log(\alpha)$

Bew.:

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{\alpha^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log(\alpha)} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^n x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^n x^n}{n!}}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^{n+1}}{(n+1)!} x^n$$

Diese PR hat KR ∞

$\ulcorner$ $a_n := \frac{(\log(\alpha))^{n+1}}{(n+1)!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

Fall $\alpha = 1$: $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ $\leadsto \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow r = \infty$

Fall $\alpha \neq 1$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{|\log(\alpha)|^{n+1}}}{\sqrt[n]{(n+1)!}} = \underbrace{\frac{|\log(\alpha)| \sqrt[n]{|\log(\alpha)|}}{\sqrt[n]{n+1}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{|\log(\alpha)| \cdot 1}{1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow r = \infty.$

$\lrcorner$

$\overset{\text{Satz 7.4}}{\Rightarrow}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} 0^n = \log(\alpha)$$

$\boxtimes$

- Beh.: $$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2}-1}{x} = 0.$$

Bew.:

Nach vorigem Bsp. gilt $\frac{\alpha^y - 1}{y} \to \log(\alpha) \quad (y\to 0)$

Substituiere $y = x^2$. Dann gilt $y\to 0$ für $x\to 0$ und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha^y - 1}{y} = \log(\alpha).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2}-1}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2}-1}{x^2}\cdot \lim_{x\to 0} x = \log(\alpha)\cdot 0 = 0.$$

$\boxtimes$

—

Funktionenfolgen und -reihen

Def.: Es seien $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n, f: D \to \mathbb{R}$ Funktionen für alle $n\in\mathbb{N}$.

a) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen f, wenn für alle $x\in D$ gilt:

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n\to\infty),$$

f heißt Grenzfunktion.

b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise gegen f, wenn die Funktionenfolge (s_n) mit

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } x\in D$$

pktw. gegen f konvergiert.

f heißt Summenfunktion.

c) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x\in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. glm. gegen f, wenn (s_n) glm. gegen f konvergiert.

Es gilt: glm. Konv. $\Rightarrow$ pktw. Konv.

Kriterien:

- Es sei (a_n) eine Nullfolge und es gelte $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ für alle $x \in D$ und für alle $n \geq n_0$ (wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ fest). Dann konvergiert f_n glm. gegen f.

- Kriterium von Weierstraß:
  Es sei (b_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sei konvergent und $n_0 \in \mathbb{N}$. Weiter ~~es~~ gelte

$$\forall n \geq n_0 \, \forall x \in D: \ |f_n(x)| \leq b_n .$$

  Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D glm.

Bsp.:

- $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$

  Beh.: (f_n) konv. glm. gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto |x|$.

  Bew.:
  Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{x^2} = |x| =: f(x),$$

  also konv. (f_n) pktw. gegen f.

  Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - |x|^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}} + 0} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

  Da $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \ (n \to \infty)$, konv. f_n glm gegen f nach obigem Kriterium.

• Beh.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ konv. glm. auf $(0,1)$

Bew.:

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt für alle $x \in (0,1)$:

$$\left|\frac{1}{nx-n^2}\right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-x} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-\frac{n}{2}} = \frac{2}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergiert, konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx-n^2}$ glm. nach dem Kriterium von Weierstraß.