Übung (17.12.22)

Funktionenfolgen und -reihen

Satz: (f_n) bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$.

Dann gilt:

- Sind alle $(f_n) \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$

Bsp.:

- $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x + nx + nx^2}{1+nx}$ $(n \in \mathbb{N})$

Beh.: (f_n) konv. punktweise, aber nicht glm. auf $[0,\infty)$.

Punktweise Grenzfunktion: $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x+1 & , x > 0 \end{cases}$

Bew.:

1) für $x = 0$ gilt: $f_n(0) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$

für $x > 0$ gilt:

$$f_n(x) = \frac{\frac{x}{n} + x + x^2}{\frac{1}{n} + x} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{x + x^2}{x} = x + 1$$

$\Rightarrow$ (f_n) konv. punktweise auf $[0,\infty)$ gegen obige Grenzfunktion.

2) Es gilt $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x + 1 = 1 \neq 0 = f(0)$

d.h. f ist nicht stetig.

Da alle f_n als Quotienten von Polynomen stetig sind, die Grenzfunktion f hingegen nicht, kann nach obigem Satz die Konvergenz von (f_n) auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig sein.

☒

- $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konv. auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen

$$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 \cdot \frac{1+x^2}{2+x^2}.$$

Bew.:

1) Für alle $x \in (0,\infty)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Wegen $\left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1$ folgt (geometrische Reihe)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^n = x^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{-1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{1+x^2+1}$$

$$= x^2 \cdot \frac{1+x^2}{2+x^2} =: f(x)$$

Für $x=0$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = 0 =: f(0)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert pktw. gegen $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 \cdot \frac{1+x^2}{2+x^2}$

2) Für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|s_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}\right| = \left|x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^{k+n+1}\right|$$

$$= \left|x^2 \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^k\right| \overset{(x>0)}{=} x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}(2+x^2)} = \frac{x^2}{(1+x^2)^n \underbrace{(2+x^2)}_{\geq 1}} \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$\overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} \frac{x^2}{1+nx^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx^2}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n}$$

Insgesamt folgt für alle $x \in [0,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, folgt, dass (s_n) glm. gegen f konvergiert, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konv. glm. gegen f.

$\boxtimes$

Differenzierbarkeit

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt in $x_0 \in I$ differenzierbar (db)

  $\Leftrightarrow$ der GW $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ ex.

  $\Leftrightarrow$ der GW $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$ ex.

  I.d.F.: obiger GW heißt Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet

- Ist f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f <u>differenzierbar</u> (db), und die Funktion

  $$f': I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

  heißt die <u>Ableitung</u> von f.

- Es gilt: f db in x_0 $\Rightarrow$ f stetig in x_0

Rechenregeln:

Es seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ db in $x_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $h: J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ sei db in $y_0 = f(x_0)$. Dann sind αf, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) sowie $h \circ f$ differenzierbar in x_0, und die Ableitungen sind gegeben durch

- $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$ Produktregel
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ Quotientenregel
- $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ Kettenregel

Satz

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und db in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ db in $y_0 := f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Bsp.:

- Es sei $a>0$. Dann gilt $(a^x)' = a^x \log(a)$ für $x \in \mathbb{R}$
- Es gilt $(\log x)' = \frac{1}{x}$ für $x>0$
- Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ für $x>0$.

Bsp.:

- $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x(\log(x)-1)$

Beh.: f ist db mit $f'(x) = \log x$

Bew.:

f ist als Produkt differenzierbarer Funktionen auf $(0,\infty)$ differenzierbar und mit der Produktregel gilt

$$f'(x) = 1(\log(x)-1) + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x) \qquad (x \in (0,\infty)).$$

$\boxtimes$

- $f: (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{e^{x^2}}{x \log x}$

Beh.: f ist db mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2\log(x) - \log(x) - 1)}{(x\log(x))^2} \qquad (x \in (1,\infty))$$

Bew.:

f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Die Funktionen $g(x) := e^{x^2}$ und $h(x) := x \log x$ $(x \in (1,\infty))$ lassen sich nach der Ketten- bzw. Produktregel ableiten. Zudem gilt $h(x) > 0$ für alle $x > 1$. Mit der Quotientenregel folgt für alle $x \in (1,\infty)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \\ &= \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x\log(x) - e^{x^2}(\log(x) + x \cdot \frac{1}{x})}{(x\log(x))^2} \\ &= \frac{e^{x^2}(2x^2\log(x) - \log(x) - 1)}{(x\log(x))^2}. \end{aligned}$$