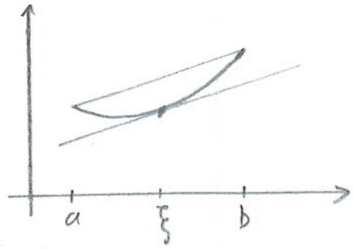
Übung (24.07.23)

<u>Mittelwertsatz</u>

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



<u>Bsp.:</u>

<u>Beh.:</u> Sinus und Cosinus sind Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

<u>Bew.:</u>

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>z.z.:</u> $|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y-x|$.

Für $x = y$ ist das klar, sei nun $x \neq y$. O.B.d.A. gelte $x < y$ (andernfalls vertausche x und y). Nach dem MWS existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{\sin(y) - \sin(x)}{y-x} = \cos(\xi).$$

$(\sin x)' = \cos(x)$
$(\cos x)' = -\sin(x)$

Daraus folgt

$$|\sin(y) - \sin(x)| = |\cos(\xi)| \cdot |y-x| \leq |y-x|.$$

Analog für cos. $\boxtimes$

<u>Mehr zu sin & cos:</u>

in VL: $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,2)$

$\exists\, \xi \in (0,2): \cos(\xi) = 0 \quad \rightsquigarrow$ Schreibe $\pi := 2\xi \approx 3{,}14$

Additionstheoreme $(x, y \in \mathbb{R})$:

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x), \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

Weiter gilt:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

(Darstellung als Potenzreihen)

__Beh.:__ Es gilt $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,\pi)$.

__Bew.:__

Für $x \in (0,2)$ gilt dies nach VL.

Es sei nun $x \in [2,\pi)$. Dann gilt

$$\sin(x) = \sin(\pi + x - \pi) = -\sin(x-\pi)$$
$$= \sin(\underbrace{\pi - x}_{\in (0,\pi-2] \subseteq (0,2)}) > 0.$$

$\pi < 4$

☑

__Beh.:__ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$

b) $\cos(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

__Bew.:__

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ex. $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in [0,\pi)$, sodass $x = k\pi + r$.

Damit folgt:

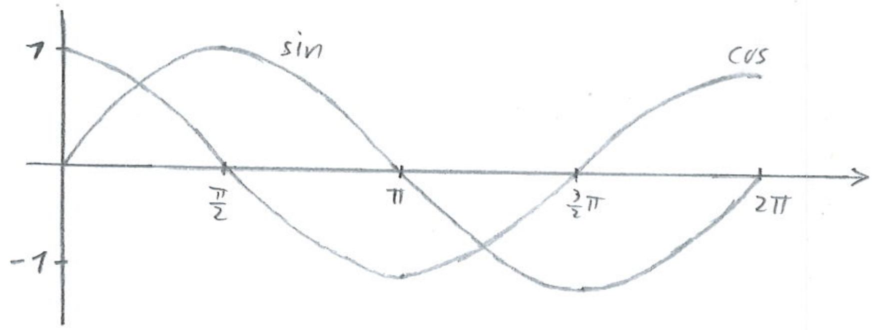
$$\sin(x) = \sin(k\pi + r) = (-1)^k \underbrace{\sin(r)}_{\substack{=0,\ r=0 \\ >0,\ r \in (0,\pi)}}$$

Also: $\sin(x) = 0 \iff r = 0 \iff x = k\pi$

b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\cos(x) = 0 &\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
&\overset{a)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z}: x + \frac{\pi}{2} = k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}: x = (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \\
&\iff \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z}: x = \tilde{k}\pi + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

☑



Satz von de l'Hospital

Es seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ db, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sowie $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren und sind beide 0 oder sind beide in $\{-\infty, \infty\}$. Weiter existiere $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann existiert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bsp.:

- **Beh.:** Es gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

  Bew.:

  Def. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x)$
  $g: (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$.

  Dann sind f, g db und es gelten (für $x \in (0, \infty)$):

  $$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

  sowie

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

  Weiter gilt:

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to \infty} 2 x^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

  Nach den Regeln von de l'Hospital gilt:

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

  $\square$

• **Beh.:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} = -2$

Bew.: Zähler und Nenner sind beliebig oft db, weil sin, cos und Polynome bel. oft db sind. Durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x\cos(x)}{-\sin(x)}$$

l'H

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}{-\cos(x)}$$

ex.

$$= \frac{2-0}{-1} = -2.$$

• **Beh.:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Bew.:

Definiere die differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x - e^{-x}$, $g(x) := e^x + e^{-x}$ $(x\in\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

sowie

$$f'(x) = e^x + e^{-x}, \quad g'(x) = e^x - e^{-x} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Hier gilt wiederum

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g'(x)$$

sowie

$$f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x), \quad g''(x) = e^x + e^{-x} = g(x) \quad (x\in\mathbb{R}),$$

d.h. durch zweimaliges Ableiten erhalten wir wieder die ursprünglichen Funktionen

$\Rightarrow$ de l'Hospital bringt keinen Erkenntnisgewinn.

Aber: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1-0}{1+0} = 1.$

☑