Übung (31.01.23)

Satz von Taylor

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f: I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal db. Es seien $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$.

Definiere

$$T_n f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorpolynom n-ter Ordnung von f im Entwicklungspunkt x_0.

Dann existiert ein ξ zwischen x und x_0
(d.h. $\min\{x, x_0\} < \xi < \max\{x, x_0\}$) mit

$$f(x) = T_n f(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Bsp.: $\tan\left(\frac{1}{10}\right) \approx ?$

möchten $\tan\left(\frac{1}{10}\right)$ näherungsweise mithilfe von Taylorpolynomen berechnen u. den Fehler abschätzen

Definiere $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \tan(x)$

$x_0 := 0$, $\frac{1}{10}$ „nahe bei" x_0

f ist db und es gilt

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1 \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Weiter berechnen wir mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\tan(x)\,(\tan(x))' = 2\tan(x)\left[\tan^2(x) + 1\right] \\ &= 2\tan^3(x) + 2\tan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6\tan^2(x)\,(\tan(x))' + 2(\tan(x))' \\ &= 6\tan^2(x)\left(\tan^2(x)+1\right) + 2\left(\tan^2(x)+1\right) \\ &= 6\tan^4(x) + 8\tan^2(x) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(iv)}(x) &= 24\tan^3(x)\left(\tan^2(x)+1\right) + 16\tan(x)\left(\tan^2(x)+1\right) \\ &= 24\tan^5(x) + 40\tan^3(x) + 16\tan(x). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2$$

$$\Rightarrow T_1 f(x,0) = f(0) + f'(0)x = x$$

$$T_3 f(x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3.$$

Wir berechnen

$$T_1 f(\tfrac{1}{10}, 0) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\tan(\tfrac{1}{10}) \approx 0{,}1003347$$

$$T_3 f(\tfrac{1}{10}, 0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = 0{,}100\overline{3}$$

$\rightsquigarrow$ $T_3 f$ ist genauere Approximation.

Wir schätzen noch den Fehler für $T_3 f$ ab:

Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$ mit

$$f(\tfrac{1}{10}) - T_3 f(\tfrac{1}{10}, 0) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{24} \cdot \left(\tfrac{1}{10}\right)^4.$$

Wir nutzen aus, dass $0 < \xi < \frac{1}{10} < \frac{\pi}{4}$, und dass tan monoton wachsend ist mit $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

$$\Rightarrow |f^{(iv)}(\xi)| \leq 24\,|\tan^5(\xi)| + 40\,|\tan^3(\xi)| + 16\,\underbrace{|\tan(\xi)|}_{= \tan(\xi) \leq \tan(\frac{\pi}{4}) = 1}$$

$$\leq 24 + 40 + 16 = 80$$

$$\Rightarrow |f(\tfrac{1}{10}) - T_3 f(\tfrac{1}{10}, 0)| = \left|\frac{f^{(iv)}(\xi)}{24} \cdot 10^{-4}\right|$$

$$\leq \frac{80}{24}\cdot 10^{-4} = \frac{10}{3}\cdot 10^{-4} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-3} = 0{,}000\overline{3}.$$

Def.:

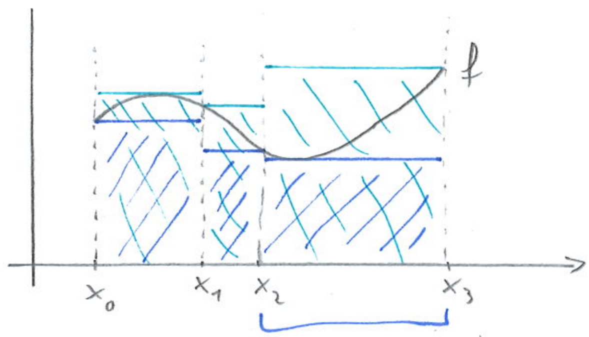
Es sei $I=[a,b]$. Sind $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, so nennen wir die Menge

$$Z=\{x_0,\dots,x_n\}$$

eine Zerlegung von I.

Die Menge aller Zerlegungen bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}$.

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.



$$M_j := \sup f([x_{j-1},x_j])$$
$$m_j := \inf f([x_{j-1},x_j])$$

„ $\int_a^b f(x)\,dx$ = Fläche unter dem Graphen "

„ $\sum_{j=1}^n (x_j-x_{j-1})\,m_j \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^n (x_j-x_{j-1})\,M_j$ "

Schreibe $I_j := [x_{j-1},x_j]$, $|I_j| = x_j - x_{j-1}$

$s_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j|\,m_j$ Untersumme

$S_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j|\,M_j$ Obersumme

$\leadsto$ $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z\in\mathcal{Z}\}$

$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z\in\mathcal{Z}\}$

f heißt Riemann-integrierbar, falls $s_f = S_f$ gilt.

I.d.F. schreibe $\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := s_f = S_f$.

Die Menge aller beschränkten und Riemann-integrierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $R([a,b])$.

Weiter: $\int_b^a f\,dx := -\int_a^b f\,dx$,

$\int_a^a f\,dx := 0$.

Kriterien: Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschr. Dann gelten

a) f monoton $\Rightarrow$ f ib

b) f stetig $\Rightarrow$ f ib

Rechenregeln: Es seien $f, g \in R([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

a) αf ist ib und $\int_a^b \alpha f \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx$

b) $f+g$ ist ib und $\int_a^b f+g \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx$

c) $f \cdot g$ ist ib, $\frac{1}{f}$ ist ib, falls ein $c > 0$ ex. mit $|f| \geq c$.

d) Ist $f \leq g$, so ist auch $\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$

e) $|f|$ ist ib und $\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx$.

Def.:
Es sei I ein Intervall, $f, F: I \to \mathbb{R}$. Ist F db und gilt $F' = f$, so nennen wir F eine Stammfunktion von f.

Erster Hauptsatz
$f \in R([a,b])$ besitze eine Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_{x=a}^b$$

Bsp.: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

Beob.: Sind $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ db, so gilt mit dem ersten Hauptsatz

$$\int_a^b f'(g(x)) g'(x) \, dx = [f \circ g]_a^b$$

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

- Es gilt $\int_a^b \frac{x}{1+x^4} \, dx = \frac{1}{2} (\arctan(b^2) - \arctan(a^2))$

Bew.:
Def. $f(x) := \arctan(x)$, $g(x) := x^2$ $(x \in [a,b])$.
Dann sind f, g db mit

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = 2x \quad (x \in [a,b]).$$

Es gilt also

$$2 \int_a^b \frac{x}{1+x^4} \, dx = \int_a^b \frac{2x}{1+x^4} \, dx = \int_a^b f'(g(x)) g'(x) \, dx = [f \circ g(x)]_{x=a}^b$$

$$= [\arctan(x^2)]_{x=a}^b = \arctan(b^2) - \arctan(a^2).$$

$\square$

• **Beh.:** Es gilt $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = -\frac{4}{5}\log(2)$.

Bew.:

Die Nullstellen des Nenners sind 3 und -2. $\leadsto x \mapsto \frac{1}{x^2-x-6}$ ist stetig auf $[-1,2]$ und somit integrierbar

$\to$ Partialbruchzerlegung: $D := \mathbb{R}\setminus\{3,-2\}$

Finde $a,b \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \quad \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{a(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{b(x-3)}{(x+2)(x-3)} \quad \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 0\cdot x + 1 = a(x+2) + b(x-3) = (a+b)x + (2a-3b)$$

$$\Leftrightarrow 0 = a+b \wedge 1 = 2a-3b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \wedge b = -\frac{1}{5}$$

$$\leadsto \int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{5}\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2}\,dx$$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(x)$ auf $(0,\infty)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x)$ auf $(-\infty,0)$

1.HS

$$= \frac{1}{5}\Big[\log(3-x) - \log(x+2)\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\underbrace{\log(1)}_{=0} - \log(4) - \log(4) + \underbrace{\log(1)}_{=0}\Big)$$

$$= -\frac{2}{5}\log(4) = -\frac{4}{5}\log(2).$$

☑

• **Beh.:** Es gilt $\int_{0}^{\pi} \sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$

Bew.:

Die Funktion $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}$ ist stetig, also $f \in R([0,\pi])$.

f hat die Stammfunktion $F: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $F(x) := -\frac{2}{3}(1+\cos(x))^{3/2}$

⌈ $F \in C^1([0,\pi])$ und es gilt

$$F'(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+\cos(x))^{1/2}\cdot(-\sin(x)) = f(x)$$ ⌋

Mit dem ersten Hauptsatz gilt also

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(0)$$

$$= -\frac{2}{3}\Big(1 + \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\Big)^{3/2} + \frac{2}{3}\Big(1 + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \underbrace{2^{3/2}}_{=\sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

$\boxtimes$

Stammfunktionen von

1) x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1 \\ \log(x), & \alpha = -1 \end{cases}$

2) α^{x} $(\alpha > 0, x \in \mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{\log(\alpha)} \alpha^{x}, & \alpha \neq 1 \\ x, & \alpha = 1 \end{cases}$