Übung (07.02.23)

Satz:
Es seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ glm., wobei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx .$$

- $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$.

Beh.: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Bew.:
Für $x = 0$ gilt: $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Für $x \in (0,1]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\cancel{x}} ye^{-y} = \frac{1}{x} \lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0,$$

also konv. f_n punktweise gegen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$.
Die Konvergenz ist aber nicht glm., denn:
für $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \sqrt{n}\, e^{-1} \not\to 0.$$

Obiger Satz ist also nicht anwendbar, aber es gilt (da f_n integrierbar):

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existiert.

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Hieraus sieht man nach obigem Satz auch, dass f_n nicht glm. gegen f konvergiert.

Rechenregeln für Integrale

1) Partielle Integration

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig db. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

2) Substitutionsregel

Es seien I ein Intervall, $g : [a,b] \to I$ stetig db und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Bsp.:

- $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx = \pi^2 - 4$

Bew.:

Mittels zweimaliger partieller Integration erhalten wir:

$$\int_0^\pi \underset{g}{x^2}\, \underset{f'}{\sin(x)}\, dx \overset{(P.I.)}{=} \Big[\underset{g}{x^2}\, \underset{f}{(-\cos(x))}\Big]_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \underset{g'}{2x}\, \underset{f}{(-\cos(x))}\, dx$$

$$= \pi^2 - 0 + 2\int_0^\pi \underset{g}{x}\, \underset{f'}{\cos(x)}\, dx$$

$$= \pi^2 + 2\left(\Big[\underset{g}{x}\, \underset{f}{\sin(x)}\Big]_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\sin(x)}\, dx\right)$$

$$= \pi^2 + 2\Big(0 - 0 - \underbrace{[-\cos(x)]_{x=0}^{\pi}}_{= -\cos(\pi) + \cos(0) = 2}\Big)$$

$$= \pi^2 - 4.$$

$\boxtimes$

- $\displaystyle\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{65}{2}$

Bew.:

Wir berechnen das Integral durch Substitution:

Setzen $g : [1,4] \to \mathbb{R}$, $g(t) := 1 + \sqrt{t}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x^3$.

Dann: $g \in C^1([1,4])$ mit $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $(t \in [1,4])$, f ist stetig

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{2}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{t})^3}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^4 f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(1)}^{g(4)} f(x)\, dx$$

$$= \int_2^3 2x^3\, dx = \left[\tfrac{1}{2} x^4\right]_2^3 = \tfrac{1}{2}\left(3^4 - 2^4\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(81 - 16) = \frac{65}{2}.$$

Weniger formal: substituiere $y = y(x) = (1+\sqrt{x})$

Merkregel $\quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \rightsquigarrow$ „$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$"

$$\underbrace{y(1) = 2,\ y(4) = 3}$$

$$\rightsquigarrow \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx = \int_2^3 2y^3\, dy = \ldots = \frac{65}{2}.$$

- $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx = 2\pi.$

Bew.:

Substituiere $y = y(x) = \sqrt{x}$

$$\rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y} \quad \rightsquigarrow \text{„} 2y\, dy = dx \text{"}$$

$y(0) = 0, \quad y(\pi^2) = \pi$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx \overset{\text{subst.}}{=} \int_0^{\pi} \underset{f'}{\sin(y)}\, \underset{g}{2y}\, dy$$

$$\overset{(\text{P.I.})}{=} \Big[\underset{f}{-\cos(y)}\, \underset{g}{2y}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underset{f}{-\cos(y)}\, \underset{g'}{2}\, dy$$

$$= 2\pi - 0 + 2\, \underbrace{\big[\sin(y)\big]_0^{\pi}}_{= \sin(\pi) - \sin(0) = 0}$$

$$= 2\pi.$$

Satz:

Es seien $a < c < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

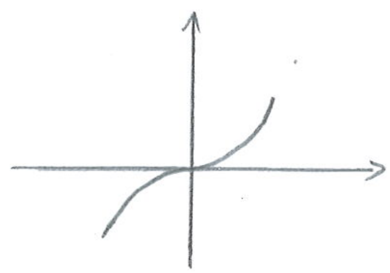
$$f \text{ ist ib} \iff \underbrace{f \text{ ist ib auf } [a,c]}_{\text{d.h. } f|_{[a,c]} \in R([a,c])} \text{ sowie auf } [c,b]$$

I.d.F.: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

- Es gilt $\int_{-1}^{1} x|x| \, dx = 0$

Bew.:

1) $$\int_{-1}^{1} x|x| \, dx = \int_{-1}^{0} x|x| \, dx + \int_{0}^{1} x|x| \, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} -x^2 \, dx + \int_{0}^{1} x^2 \, dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$



$x|x|$ ist ungerade

2) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$.

f ist ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$

Substituiere $y = y(x) = -x \rightsquigarrow dy = -dx$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$

Damit folgt:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = \int_{1}^{-1} f(-y)(-1) \, dy = \int_{-1}^{1} f(-y) \, dy$$
$$\overset{f \text{ ung.}}{=} - \int_{-1}^{1} f(y) \, dy$$
$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 0.$$

Def.:

Es sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ ib auf $[a, c]$ für $a < c < b$.

Existiert $\lim_{c \to b-} \int_{a}^{c} f(x) \, dx \in \mathbb{R}$, so heißt f uneigentlich Riemann-integrierbar, wir schreiben

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx := \lim_{c \to b-} \int_{a}^{c} f(x) \, dx.$$

Wir sagen auch, dass $\int_{a}^{b} f(x) \, dx$ konvergiert.

Analog für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

- Es gilt $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Es handelt sich um ein uneigentliches Integral, da der Integrand in $x=0$ nicht definiert und nicht beschränkt ist.

Bew.:

Es sei $\varepsilon \in (0,1)$. Dann ist $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ als stet. Funktion auf $[\varepsilon,1]$ ib.

Substituiere $x = x(\varphi) = \sin^2(\varphi)$

$$\frac{dx}{d\varphi} = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,,$$

Damit folgt:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\underbrace{\arcsin(\sqrt{\varepsilon})}_{=:\hat{\varepsilon}}}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}{\sqrt{\sin^2(\varphi)}} \cdot 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_{\hat{\varepsilon}}^{\pi/2} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \cdot 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = 2\int_{\hat{\varepsilon}}^{\pi/2} \cos^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$\overset{\text{(wie in VL)}}{=} \left[\varphi + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]_{\hat{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \hat{\varepsilon} - \sin(\hat{\varepsilon})\cos(\hat{\varepsilon}).$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt auch: $\hat{\varepsilon} = \arcsin(\sqrt{\varepsilon}) \to 0$ (da arcsin stetig)

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{\varepsilon}) - \sin(\arcsin(\sqrt{\varepsilon}))\cos(\arcsin(\sqrt{\varepsilon}))\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \sin(0)\cos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxtimes$