Uneigentliche Integrale

Def.: Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ für $[a,b] \in I$. Dann heißt f absolut uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist, d.h. wenn

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \quad \text{konvergiert.}$$

I ist von der Form $[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ oder (α,β).

Kriterien: $f,g: I \to \mathbb{R}$

a) Ist $|f| \leq g$ und g ib, so ist f absolut ib

b) Ist $0 \leq f \leq g$ und f nicht ib, so ist g nicht ib.

Bsp.:

- **Beh.:** $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konv., aber nicht absolut

Bew.:

1) Es sei $b > \pi$. Dann gilt

$$\int_\pi^b \frac{1}{x}\sin(x)\,dx \overset{(P.I.)}{=} \left[-\frac{1}{x}\cos(x)\right]_\pi^b - \int_\pi^b -\frac{1}{x^2}(-\cos(x))\,dx$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{b}\cos(b)}_{|\cdot| \leq \frac{1}{b} \to 0 \ (b\to\infty)} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^b \underbrace{\frac{1}{x^2}\cos(x)}_{|\cdot| \leq \frac{1}{x^2}}\,dx$$

$|\cdot| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konv.

$\overset{\text{Maj.}}{\underset{\text{krit.}}{\Longrightarrow}} \int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx$ konv.

d.h. $\int_\pi^\infty \frac{1}{x}\sin(x)\,dx$ konv.

in VL: mit Cauchykriterium gezeigt.

2) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\int_\pi^{k\pi} \frac{1}{x}|\sin(x)|\,dx = \sum_{\ell=2}^{k} \int_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \frac{1}{x}|\sin(x)|\,dx.$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \frac{1}{x}|\sin(x)|\,dx \geq \frac{1}{\ell\pi}\int_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{1}{\ell\pi}\int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx$$

$x \mapsto |\sin(x)|$ ist π-periodisch

$$= \frac{1}{\ell\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \frac{1}{\ell\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\ell\pi}.$$

Damit folgt:

$$\int_{\pi}^{k\pi} \frac{1}{x}|\sin(x)|\,dx \geq \sum_{\ell=2}^{k} \frac{2}{\ell\pi} \longrightarrow \infty \quad (k\to\infty) \quad (\text{harmonische Reihe})$$

d.h. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x}|\sin(x)|\,dx$ divergiert.

$\square$

- Beh.: $\int_1^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(2x-1)^2}\,dx$ divergiert

Bew.:

Für $x \geq 1$ gilt:

$$\frac{x\sqrt{x}}{(2x-1)^2} \geq \frac{x\sqrt{x}}{(2x)^2} = \frac{\sqrt{x}}{4x} = \frac{1}{4\sqrt{x}}.$$

Nach VL divergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$. Nach dem Minorantenkriterium divergiert also auch $\int_1^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(2x-1)^2}\,dx$.

$\square$

- Beh.: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x+e^x}\,dx$ konv.

Bew.:

Es gilt für $x \geq 2$ (≥ 0)

$$\frac{1}{x+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Für $b > 2$ berechnen wir

$$\int_2^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_2^b = -e^{-b} + e^{-2} \xrightarrow{b\to\infty} 0 + e^{-2} = e^{-2},$$

d.h. $\int_2^{\infty} e^{-x}\,dx$ konvergiert.

Nach dem Majorantenkrit. konv. also auch $\int_2^{\infty} \frac{1}{x+e^x}\,dx$.

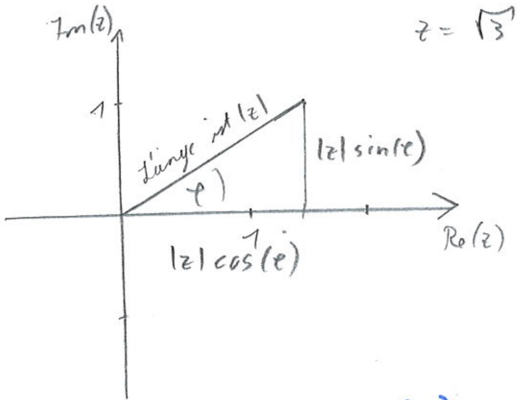
Komplexe Zahlen

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Die Zahl $z = x + iy$ heißt komplexe Zahl, x heißt Realteil von z, y Imaginärteil von z.

Schreibe: $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$.

$\bar{z} := x - iy$ komplex Konjugierte

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag



$z = \sqrt{3} + i$, $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$

$\operatorname{Im}(z) = 1$

$|z| = 2$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$

$\rightsquigarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Das Argument φ von $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist eindeutig bestimmt durch

1) $-\pi < \varphi \leq \pi$
2) $\operatorname{Re}(w) = \cos(\varphi)\,|w|$
3) $\operatorname{Im}(w) = \sin(\varphi)\,|w|$.

Def.:

Für $z = x + iy$ definiere

$$e^z := e^x\,(\cos(y) + i\sin(y))$$

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Bekannte Rechenregeln (z.B. Additionstheoreme) gelten auch für die komplexen Fortsetzungen.

Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gelten

$$z \cdot w = |z| e^{i\arg(z)} \cdot |w| e^{i\arg(w)} = |z||w|\, e^{i(\arg(z) + \arg(w))}$$

Bsp.: Es sei $z := \sqrt{3} + i$

Berechne den Realteil, Imaginärteil und Betrag von $w := z^{11}$.

Es gilt: $z = |z| e^{i \arg(z)} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\sqrt{3} = 2\cos(\varphi)$, $1 = 2\sin(\varphi)$

d.h. $\varphi = \frac{\pi}{6}$

Weiter gilt

$$z^{11} = |z|^{11} \cdot e^{i \cdot 11 \cdot \arg(z)} = 2^{11} e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

$$= 2^{11} \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2^{11}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2^{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(w) = 2^{10}\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}(w) = -2^{10}$

$|w| = |z|^{11} = 2^{11}$.

Bsp.:

Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $e^z = 2 + 2i =: w$

Es gilt $\varphi := \arg(w) = \frac{\pi}{4}$

$|w| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d.h. $\varphi = \frac{\pi}{4}$

d.h. $w = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Die Lösungen von $e^z = w$ sind gerade die Logarithmen von w, d.h.

$$e^z = w$$

$$\Leftrightarrow z = \underbrace{\log(2\sqrt{2})}_{= \frac{3}{2}\log(2)} + i\,\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi i \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

Also ist $\{ \frac{3}{2}\log(2) + i\,\frac{\pi}{4} + i \cdot 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \}$

die Menge der Lösungen von $e^z = w$.

- Real-, Imaginärteil und Betrag von $\frac{2+i}{3-4i} =: z$

Es gilt $z = \frac{2+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6 + 8i + 3i - 4}{3^2 + 4^2} = \frac{2 + 11i}{25}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, z = \frac{2}{25}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{11}{25}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{2}{25}\right)^2 + \left(\frac{11}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{4 + 121} = \frac{\sqrt{125}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Fourierreihen

$f \in R([-\pi, \pi])$, f 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$. (V)

Fourierkoeffizienten:

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \qquad \text{Fourierreihe}$$

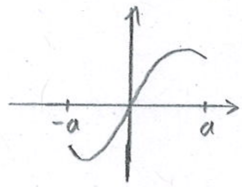
- f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann gilt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin(nx)\, dx}_{} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$x \mapsto f(x)\sin(nx)$ ist ungerade

$$\underset{d\tilde{x} = -dx}{\overset{\tilde{x} = -x}{=}} - \int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-\tilde{x})}_{= f(\tilde{x})} \underbrace{\sin(-n\tilde{x})}_{= -\sin(n\tilde{x})} d\tilde{x}$$

$$= - \int_0^{\pi} f(\tilde{x}) \sin(n\tilde{x})\, d\tilde{x}$$



Integral einer ungeraden Funktion über ein um 0 symmetrisches Intervall ist 0.

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(x) \cos(nx)\, dx}_{} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$\underset{d\tilde{x} = -dx}{\overset{\tilde{x} = -x}{=}} - \int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-\tilde{x})}_{= f(\tilde{x})} \underbrace{\cos(-n\tilde{x})}_{= \cos(n\tilde{x})} d\tilde{x}$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ ist gerade

$$= \int_0^{\pi} f(\tilde{x}) \cos(n\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

- f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow a_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$