Karlsruher Institut für Technologie

27. Oktober 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 01

Abgabe: 3. November 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+1+(1+1)=5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

(i) $|2x-4|+x<5$,

(ii) $|x+5| \leq 2(4-x)$.

(b) Geben Sie Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $I \setminus J = \{5, 12\}$.

(c) Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$,

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n > x$.

(ii) $A = \left\{-x - \frac{1}{x} :\ 0 < x \leq 2\right\}$.

Aufgabe 2 (K) $3+3+4=10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe der Axiome (A 1) – (A 14), dass $a \leq b$ und $c \leq 0 \implies ac \geq bc$.

(b) Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und $B = \{b \in \mathbb{R} :\ 1/b \in A\}$. Zeigen Sie, dass B nach oben beschränkt ist mit $\sup B = 1/\inf A$.

(c) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Beweisen Sie: Die Menge $A + B = \{a + b :\ a \in A, b \in B\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine 1 in $\mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis für die Eindeutigkeit der 0.

(b) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ die Inverse bezüglich $+$ eindeutig ist. Machen Sie sich klar, dass dies auch für die Inverse bezüglich $\cdot$ gilt.

(c) Zeigen Sie mithilfe der Axiome (A 1) – (A 14) die folgenden Aussagen:

(i) $a < b$ und $0 < c \implies ac < bc$.

(ii) $a \leq b$ und $c \leq d \implies a + c \leq b + d$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

(a) $|3x + 2| - x < 6$,

(b) $x \leq x^2 - 6$.

Aufgabe 5.

(a) Geben Sie ein Intervall $H \subseteq \mathbb{R}$ und Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit den jeweiligen Eigenschaften an.

(i) H besitzt ein Infimum, aber kein Supremum.

(ii) H besitzt ein Maximum und ein Infimum, welches kein Minimum ist.

(iii) $\mathbb{R} \setminus (I \cap J) = (-\infty, -1) \cup [7, \infty)$, wobei I offen und J abgeschlossen ist.

(b) Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $A = \left\{ \frac{x^3}{1 + x^2} : x \geq 0 \right\}$,

(ii) $A = \left\{ \frac{|-x|}{1 + x} : x \geq 0 \right\}$,

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n > x$.

(iii) $A = \{4 - x^2 : x \in [-4, 4)\}$.

Aufgabe 6.

(a) Es seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \quad \text{sowie} \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Geben Sie zudem Beispiele für A und B an, sodass obige Ungleichungen *strikt* sind, also $<$ anstelle von $\leq$ gilt.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben (bzw. unten) beschränkt. Zeigen Sie:

$$\sup M = \min\{s \in \mathbb{R} : \ m \le s \text{ für alle } m \in M\}$$
$$(\text{bzw. } \inf M = \max\{s \in \mathbb{R} : \ s \le m \text{ für alle } m \in M\}).$$

Aufgabe 7. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Beweisen Sie:

(a) Die Menge $A \cup B$ ist nach unten beschränkt und es gilt:

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(b) Die Menge $-A = \{-a : \ a \in A\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Nutzen Sie dies, um Satz 1.1 zu beweisen.

Werbung