Karlsruher Institut für Technologie

3. November 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 01

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+1+(1+1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet*.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

(i) $|2x-4| + x < 5$,

(ii) $|x+5| \le 2(4-x)$.

(b) Geben Sie Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ an, für die $I \setminus J = \{5, 12\}$.

(c) Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$,

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n > x$.

(ii) $A = \left\{-x - \dfrac{1}{x} :\ 0 < x \le 2\right\}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Es gilt $\{x \in \mathbb{R} :\ |2x-4| + x < 5\} = (-1, 3)$.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $2x - 4 \ge 0 \iff 2x \ge 4 \iff x \ge 2$. Wir unterscheiden also die Fälle:

Fall 1 Sei $x \ge 2$. Dann gilt

$$|2x-4| + x < 5 \iff 2x - 4 + x < 5 \iff 3x < 9 \iff x < 3.$$

Fall 2 Sei $x < 2$. Dann gilt

$$|2x-4| + x < 5 \iff -2x + 4 + x < 5 \iff -x < 1 \iff x > -1.$$

Insgesamt erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & |2x-4| + x < 5 \\ \iff & ((x \ge 2) \wedge (x < 3)) \vee ((x < 2) \wedge (x > -1)) \\ \iff & x \in (-1, 3). \end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* Die Ungleichung $|x+5| \leq 2(4-x)$ wird genau dann erfüllt, wenn $x \in (-\infty, 1]$ gilt.

Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:

Fall 1 Sei $x \geq -5$. In diesem Fall gilt $x+5 \geq 0$ und somit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$x+5 \leq 8-2x \quad \Longleftrightarrow \quad 3x \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 1.$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 1] \cap [-5, \infty) = [-5, 1]$ erfüllt.

Fall 2 Sei $x < -5$. In diesem Fall gilt $x+5 < 0$ und wir erhalten $|x+5| = -(x+5)$. Damit ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu

$$-(x+5) \leq 8-2x \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 13$$

Die Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, 13] \cap (-\infty, -5) = (-\infty, -5)$ erfüllt.

Insgesamt wird die gegebene Ungleichung also für $x \in (-\infty, 1]$ erfüllt.

(b) Wegen $I \setminus J = \{x \in I : \ x \notin J\}$ gilt $I \setminus J = \{5, 12\}$ für $I = [5, 12]$ und $J = (5, 12)$.

(c) (i) *Behauptung:* Es gelten $\max A = \sup A = 5/4, \inf A = -1$ und $\min A$ existiert nicht.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$(-1)^n + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}.$$
Somit ist $5/4$ eine obere Schranke für A. Außerdem ist $5/4 = (-1)^2 + 1/2^2 \in A$ und somit gilt $\max A = \sup A = 5/4$.

Andererseits ist $(-1)^n + 1/n^2 \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist -1 eine untere Schranke von A. Als Nächstes zeigen wir, dass -1 die größte untere Schranke ist. Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ mit $y > -1$ und $\varepsilon = y + 1 > 0$. Nach Vorlesung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1/(2\sqrt{\varepsilon}) - 1/2$. Setze $n_0 = 2m + 1$. Dann gilt:

$$m > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \iff 2m > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \iff 2m+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff \varepsilon > \frac{1}{(2m+1)^2}$$
$$\iff y+1 > \frac{1}{n_0^2} \iff y > \frac{1}{n_0^2} + (-1)^{n_0} \in A.$$

Folglich ist $y > -1$ keine untere Schranke von A und $\inf A = -1$. Ferner gilt $(-1)^n + 1/n^2 \geq -1 + 1/n^2 > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $-1 \notin A$. Damit existiert $\min A$ nicht.

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\max A = \sup A = -2$, $\min A$ und $\inf A$ existieren nicht.

Wir zeigen zunächst, dass A nach unten unbeschränkt ist und somit weder $\inf A$ noch $\min A$ existieren. Es sei $r < -2$, dann ist $-1/r \in (0, 1/2) \subseteq (0, 2]$. Mit $x = -1/r$ folgt
$$A \ni -x - \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{x} = r,$$

das heißt, A ist nach unten nicht beschränkt und somit folgt der erste Teil der Behauptung.

Wegen $-x - 1/x \leq -x \leq 0$ (für $x \in (0,2]$) ist A allerdings nach oben beschränkt. Wir werden zeigen: $x + 1/x \geq 1 + 1/1 = 2$ für alle $x \in (0,2]$ und somit auch $-x-1/x \leq -1-1/1 = -2$ für alle $x \in (0,2]$, womit $\sup A = \max A = -2$ gezeigt ist.

Wir zeigen zunächst: Für $0 < x < y \leq 1$ gilt $x + 1/x > y + 1/y$. Es seien also $0 < x < y \leq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(x-y)(xy-1) > 0 \\ \iff\ & xy(x-y) + y - x > 0 \\ \iff\ & y(x^2+1) > x(y^2+1) \\ \iff\ & xy(x+\frac{1}{x}) > xy(y+\frac{1}{y}) \\ \iff\ & x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für alle $x \in (0,1]$ somit $x+1/x \geq 1+1/1 = 2$, also $-x-1/x \leq -2$ für alle $x \in (0,1]$.

Weiter gilt $x + 1/x < y + 1/y$ für $1 \leq x < y$: in einer analogen Rechnung wie oben erhalten wir für $1 \leq x < y$

$$(y-x)(xy-1) > 0 \iff x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}.$$

Es gilt also $x + 1/x \geq 1 + 1/1 = 2$ für alle $x \in [1,2]$ und damit $-x - 1/x \leq -2$ für alle $x \in [1,2]$. Insgesamt gilt $-x - 1/x \leq -2$ für alle $x \in (0,2]$. Da diese obere Schranke für $x = 1$ angenommen wird, folgt $\sup A = \max A = -2$. □

Aufgabe 2 (K) $3 + 3 + 4 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe der Axiome (A 1) – (A 14), dass $a \leq b$ und $c \leq 0$ $\Longrightarrow$ $ac \geq bc$.

(b) Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und $B = \{b \in \mathbb{R} :\ 1/b \in A\}$. Zeigen Sie, dass B nach oben beschränkt ist mit $\sup B = 1/\inf A$.

(c) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Beweisen Sie: Die Menge $A + B = \{a + b :\ a \in A, b \in B\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Mit (A 3) und (A 13) gilt:

$$a \leq b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = a + (-a) \leq b + (-a) = b - a.$$

Aus $c \leq 0$ und $0 \leq b - a$ folgt mit (A 14):

$$(-a)c + bc \overset{(A\,4)}{\underset{(A\,8)}{=}} cb + c(-a) \overset{(A\,9)}{=} c(b-a) \overset{(A\,14)}{\leq} 0 \cdot (b-a) = 0. \qquad (\star)$$

Weiter gilt

$$(-a)c + ac \overset{(A\,9)}{=} ((-a) + a)c = 0,$$

das heißt, das Inverse von $(-a)c$ bezüglich $+$ ist ac. Damit folgt aus $(\star)$ und (A 13): $bc \leq ac$.

(b) Zunächst halten wir fest, dass $B \neq \varnothing$: wegen $A \neq \varnothing$ existiert ein $a_0 \in A$ und nach Voraussetzung gilt $a_0 \geq \inf A > 0$, also ist insbesondere $a_0 \neq 0$ und damit per Definition $1/a_0 \in B$.

Es sei nun $b \in B$, dann gilt $b \neq 0$ und $1/b \in A$. Somit ist $1/b \geq \inf A$, also $b \leq 1/\inf A$. Damit haben wir gezeigt, dass B nach oben beschränkt ist und $1/\inf A$ eine obere Schranke von B ist. Es bleibt zu zeigen, dass $1/\inf A$ auch die kleinste obere Schranke von B ist. Wir wählen $S \in (0, 1/\inf A)$ und zeigen, dass S keine obere Schranke von B ist. Es gilt $1/S > \inf A$. Per Definition vom Infimum existiert nun ein $a \in A$ mit $1/S > a \geq \inf A$. Mit $b = 1/a \in B$ folgt $S < 1/a = b$ und damit ist S keine obere Schranke von B. Somit gilt $\sup B = 1/\inf A$.

(c) Da A und B beschränkt sind, existieren $\sup A$, $\sup B$, und es gelten $a \leq \sup A$ für alle $a \in A$ sowie $b \leq \sup B$ für alle $b \in B$. Somit erhält man für $a \in A$ und $b \in B$:

$$a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B,$$

das heißt, $A + B$ ist nach oben durch $\sup A + \sup B$ beschränkt. Außerdem gilt damit $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Wir zeigen nun, dass $\sup A + \sup B$ auch die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist (dann ist die Behauptung gezeigt). Dazu nehmen wir an, dass es eine kleinere obere Schranke c von $A + B$ gäbe, das heißt, es würde $c < \sup A + \sup B$ und

$$a + b \leq c \qquad \text{für alle } a \in A,\ b \in B \qquad (\star)$$

gelten. Wir definieren nun $\varepsilon = \sup A + \sup B - c > 0$. Zu ε existiert nun nach Definition des Supremums ein $a_0 \in A$ mit $a_0 > \sup A - \varepsilon/2$ und analog ein $b_0 \in B$ mit $b_0 > \sup B - \varepsilon/2$. Insgesamt gilt somit

$$a_0 + b_0 > \sup A + \sup B - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon = c,$$

ein Widerspruch zu $(\star)$. Also ist $\sup A + \sup B$ die kleinste obere Schranke von $A + B$. $\square$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine 1 in $\mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis für die Eindeutigkeit der 0.

(b) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ die Inverse bezüglich $+$ eindeutig ist. Machen Sie sich klar, dass dies auch für die Inverse bezüglich $\cdot$ gilt.

(c) Zeigen Sie mithilfe der Axiome (A 1) – (A 14) die folgenden Aussagen:

(i) $a < b$ und $0 < c \implies ac < bc$.

(ii) $a \leq b$ und $c \leq d \implies a + c \leq b + d$.

Lösungsvorschlag.

(a) Der Beweis ist analog zur Eindeutigkeit der 0 in der Vorlesung. Es sei $\tilde{1} \in \mathbb{R}$ und es gelte $\forall a \in \mathbb{R}: \ a \cdot \tilde{1} = a$. Mit $a = 1$ folgt $1 \cdot \tilde{1} = 1$. Analog folgt mit $a = \tilde{1}$ in (A 6) $\tilde{1} \cdot 1 = \tilde{1}$. Aus (A 8) folgt nun $\tilde{1} = \tilde{1} \cdot 1 = 1 \cdot \tilde{1} = 1$.

(b) Wir nehmen an, $\widetilde{-a}$ sei eine Inverse von $a \in \mathbb{R}$ bezüglich $+$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
-a &\overset{\text{(A 2)}}{=} -a + 0 \\
&\overset{\text{(A 3) bzgl. } \widetilde{-a}}{=} -a + (a + (\widetilde{-a})) \\
&\overset{\text{(A 1)}}{=} (-a + a) + (\widetilde{-a}) \\
&\overset{\text{(A 4)}}{=} (a + (-a)) + (\widetilde{-a}) \\
&\overset{\text{(A 3) bzgl. } -a}{=} 0 + (\widetilde{-a}) \\
&\overset{\text{(A 4)}}{=} \widetilde{-a} + 0 \\
&\overset{\text{(A 2)}}{=} \widetilde{-a},
\end{aligned}
$$

woraus die Eindeutigkeit folgt.

(c) (i) Es gilt

$$a < b \iff a \leq b \quad \text{und} \quad a \neq b$$

und analog

$$0 < c \iff 0 \leq c \quad \text{und} \quad 0 \neq c.$$

Aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt mit (A 14): $ac \leq bc$. Angenommen es gelte $ac = bc$. Da $c \neq 0$, existiert nach (A 7) ein solches c^{-1}, dass gilt:

$$a = ac \cdot c^{-1} = bc \cdot c^{-1} = b,$$

was einen Widerspruch zu $a \neq b$ darstellt. Somit folgt $ac < bc$.

(ii) Es gilt

$$a \le b \quad \overset{(\text{A}\,13)}{\Longrightarrow} \quad a + c \le b + c$$

und

$$c \le d \quad \overset{(\text{A}\,13)}{\Longrightarrow} \quad b + c \le b + d,$$

woraus mit (A 12) folgt: $a + c \le b + d$. □

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

(a) $|3x + 2| - x < 6$,

(b) $x \le x^2 - 6$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\{x \in \mathbb{R} : |3x + 2| - x < 6\} = (-2, 2)$.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $3x + 2 \ge 0 \iff 3x \ge -2 \iff x \ge -2/3$. Wir unterscheiden also die Fälle:

Fall 1 Sei $x \ge -2/3$. Dann gilt

$$|3x + 2| - x < 6 \iff 3x + 2 - x < 6 \iff x < 2.$$

Fall 2 Sei $x < -2/3$. Dann gilt

$$|3x + 2| - x < 6 \iff -3x - 2 - x < 6 \iff x > -2.$$

Insgesamt erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & |3x + 2| - x < 6 \\ \iff & \left(\left(x \ge -\frac{2}{3}\right) \wedge (x < 2)\right) \vee \left(\left(x < -\frac{2}{3}\right) \wedge (x > -2)\right) \\ \iff & x \in (-2, 2). \end{aligned}$$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\{x \in \mathbb{R} : x \le x^2 - 6\} = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \le x^2 - 6 &\iff x^2 - x - 6 \ge 0 \\ &\iff (x - 3)(x + 2) \ge 0 \\ &\iff ((x - 3 \ge 0) \wedge (x + 2 \ge 0)) \vee ((x - 3 \le 0) \wedge (x + 2 \le 0)) \\ &\iff ((x \ge 3) \wedge (x \ge -2)) \vee ((x \le 3) \wedge (x \le -2)) \\ &\iff (x \ge 3) \vee (x \le -2) \\ &\iff x \in [3, \infty) \cup (-\infty, -2]. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.

(a) Geben Sie ein Intervall $H \subseteq \mathbb{R}$ und Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit den jeweiligen Eigenschaften an.

(i) H besitzt ein Infimum, aber kein Supremum.

(ii) H besitzt ein Maximum und ein Infimum, welches kein Minimum ist.

(iii) $\mathbb{R} \setminus (I \cap J) = (-\infty, -1) \cup [7, \infty)$, wobei I offen und J abgeschlossen ist.

(b) Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $A = \left\{\dfrac{x^3}{1+x^2} : x \geq 0\right\}$,

(ii) $A = \left\{\dfrac{|-x|}{1+x} : x \geq 0\right\}$,

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n > x$.

(iii) $A = \{4 - x^2 : x \in [-4, 4)\}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) $H = (a, \infty)$ oder $H = [a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

(ii) $H = (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ beliebig.

(iii) Wegen $\mathbb{R} \setminus (I \cap J) = \{x \in \mathbb{R} : x \notin I \cap J\}$ ist $I \cap J = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (I \cap J))$. Aus

$$\mathbb{R} \setminus (I \cap J) = (-\infty, -1) \cup [7, \infty)$$

erhalten wir daher

$$I \cap J = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, -1) \cup [7, \infty)) = [-1, 7).$$

Eine mögliche Wahl für I und J ist daher $I = (-2, 7)$ und $J = [-1, 7]$.

(b) (i) *Behauptung:* $\sup A$ und $\max A$ existieren nicht und es gilt $\min B = \inf B = 0$.

Angenommen es existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ für alle $a \in A$, das heißt,

$$\frac{x^3}{1+x^2} \leq s \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{+}$$

Dann gilt insbesondere $s \geq 0 = 0^3/(1+0^2) \in A$. Für $\hat{x} = 2s + 1$ gilt:

$$\hat{x} > 2s \geq \left(\frac{1}{\hat{x}^2} + 1\right)s \quad \Longrightarrow \quad \hat{x}^3 > \left(1 + \hat{x}^2\right)s \quad \Longrightarrow \quad \frac{\hat{x}^3}{1+\hat{x}^2} > s,$$

was einen Widerspruch zu (+) darstellt. Folglich ist A nach oben unbeschränkt und $\sup A$ und $\max A$ existieren nicht.

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$: $x^3/(1+x^2) \geq 0$. Somit ist 0 eine untere Schranke für B. Des Weiteren gilt $0 = 0^3/(1+0^2) \in B$, woraus folgt: $\min B = \inf B = 0$.

(ii) *Behauptung:* Es gelten $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$ und $\max A$ existieren nicht.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt:

$$\frac{|-x|}{1+x} = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1,$$

sowie

$$\frac{|-x|}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

Somit ist 0 eine unter Schranke für A, 1 ist eine obere Schranke für A, und es gilt $1 \notin A$. Als Nächstes zeigen wir, dass 1 die kleinste obere Schranke ist. Sei dazu $s \in \mathbb{R}$ mit $0 < s < 1$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt

$$\frac{|-x|}{1+x} \leq s \iff x \leq (1+x)s \iff x(1-s) \leq s \iff x \leq \frac{s}{1-s}.$$

Nach Vorlesung existiert ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x > s/(1-s)$. Für dieses x gilt aufgrund der obigen Äquivalenz $|-x|/(1+x) > s$, das heißt, s ist keine obere Schranke für A. Also gilt $\sup A = 1$.

Zuletzt ist $0 = |-0|/(1+0) \in A$, weshalb 0 die größte untere Schranke von A ist, das heißt, es gilt $\min A = \inf A = 0$.

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\max A = \sup A = 4$ und es gilt $\min A = \inf A = -12$.

Für alle $x \in [-4, 4)$ gilt $4 - x^2 \leq 4$. Weiter ist $4 = 4 - 0^2 \in A$ und damit gilt $\max A = \sup A = 4$.

Für alle $x \in [-4, 4)$ gilt $|x| \leq 4$ und damit

$$4 - x^2 = 4 - |x|^2 \geq 4 - 4^2 = -12.$$

Weiter ist $-12 = 4 - (-4)^2 \in A$, weshalb $\min A = \inf A = -12$ gilt. □

Aufgabe 6.

(a) Es seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \quad \text{sowie} \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Geben Sie zudem Beispiele für A und B an, sodass obige Ungleichungen *strikt* sind, also $<$ anstelle von $\leq$ gilt.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben (bzw. unten) beschränkt. Zeigen Sie:

$$\sup M = \min\{s \in \mathbb{R} : \ m \leq s \text{ für alle } m \in M\}$$
$$(\text{bzw. } \inf M = \max\{s \in \mathbb{R} : \ s \leq m \text{ für alle } m \in M\}).$$

Lösungsvorschlag.

(a) Da A und B beschränkt sind und $A \cap B \neq \varnothing$ ist, gelten für $x \in A \cap B$:

$$\inf A \leq x \leq \sup A \quad \text{sowie} \quad \inf B \leq x \leq \sup B,$$

also $\max\{\inf A, \inf B\} \leq x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Somit ist $\max\{\inf A, \inf B\}$ eine untere Schranke für $A \cap B$, insbesondere gilt $\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B)$. Genauso ist $\min\{\sup A, \sup B\}$ eine obere Schranke für $A \cap B$, weshalb $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ gilt.

Um zu zeigen, dass die beiden Ungleichungen strikt sein können, betrachten wir als Beispiel die Mengen $A = [-3, -2] \cup [0, 1]$ und $B = [-1, 0] \cup [2, 3]$. Dann sind $A \cap B = \{0\}$ und

$$\max\{\inf A, \inf B\} = \max\{-3, -1\} = -1 < 0 = \inf(A \cap B)$$

sowie

$$\min\{\sup A, \sup B\} = \min\{1, 3\} = 1 > 0 = \sup(A \cap B).$$

(b) Wir wissen bereits, dass $\sup M$ existiert. Wir definieren die Menge der oberen Schranken von M als $S = \{s \in \mathbb{R} : \ m \leq s \text{ für alle } m \in M\}$.

Wir zeigen, dass $S = [\sup M, \infty)$ gilt. Sei dazu zuerst $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq \sup M$. Da $\sup M$ eine obere Schranke von M ist, gilt $\sup M \geq m$ für alle $m \in M$ und insbesondere $m \leq \sup M \leq s$ für alle $m \in M$. Also ist $s \in S$. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ mit $s < \sup M$. Nach der Definition des Supremums ist s keine obere Schranke von M und damit gilt $s \notin S$.

Also ist $S = [\sup M, \infty)$ gezeigt. Die Menge $S = [\sup M, \infty)$ ist nach unten beschränkt und ihr Infimum ist gegeben durch $\inf S = \sup M$. Wegen $\sup M \in S$ existiert $\min S = \inf S = \sup M$. □

Aufgabe 7. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Beweisen Sie:

(a) Die Menge $A \cup B$ ist nach unten beschränkt und es gilt:

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(b) Die Menge $-A = \{-a : \ a \in A\}$ ist nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Nutzen Sie dies, um Satz 1.1 zu beweisen.

Lösungsvorschlag.

(a) Es sei $x \in A \cup B$, das heißt, es gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Im ersten Fall gilt $x \geq \inf A$, im zweiten $x \geq \inf B$. In beiden Fällen gilt also $x \geq \min\{\inf A, \ \inf B\}$. Somit ist $A \cup B$ nach unten beschränkt mit $\inf(A \cup B) \geq \min\{\inf A, \ \inf B\}$.

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Da $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$ gelten, erhalten wir $\inf A \geq \inf(A \cup B)$ und $\inf B \geq \inf(A \cup B)$, also auch $\min\{\inf A, \ \inf B\} \geq \inf(A \cup B)$, was die gewünschte Gleichheit beweist.

(b) Sei $b \in -A$ beliebig. Dann ist $b = -a$ für ein $a \in A$. Da A nach unten beschränkt ist, gilt $a \geq \inf A$ und damit $b \leq -\inf A$. Da b beliebig war, ist $-A$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup(-A) \leq -\inf A$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann ist $-a \in -A$ und somit $-a \leq \sup(-A)$. Multiplizieren mit -1 liefert $a \geq -\sup(-A)$. Da a hier beliebig ist, folgt $\inf A \geq -\sup(-A)$ und damit auch $-\inf A \leq \sup(-A)$.

Insgesamt erhalten wir $-\inf A = \sup -A$, was zu zeigen war.

Die Aussage von Satz 1.1 folgt: Da nun $-A$ nun nach oben beschränkt ist, ist nach (A 15) $\sup -A$ vorhanden, also auch $\inf A$. $\square$