

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 02

Abgabe: 10. November 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $2 + 2 + 1 = 5$ Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet.

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke für jedes $n \in \mathbb{N}$ geschlossene Formeln, also Ausdrücke, die ohne Summe oder Produkt auskommen und nur von n abhängen.

(a) $\sum_{k=1}^n k 2^k.$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}.$

(c) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$

Aufgabe 2 (K) $3+3+4 = 10$ Punkte. Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(n^3 + 5n)/6$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 3. Finden Sie für die folgenden Ausdrücke für jedes $n \in \mathbb{N}$ geschlossene Formeln, also Ausdrücke, die ohne Summe oder Produkt auskommen und nur von n abhängen.

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$

(b) $\sum_{k=1}^n (1 - 2k)^2.$

(c) $\sum_{j=1}^n (2j - 1)^3.$

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Seien $x_1, \dots, x_n \in [0, \infty)$. Dann gilt die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung

$$\prod_{j=1}^n (1 + x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^n x_j.$$

(b) Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n! \leq \frac{1}{10} n^n$.

(e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ eine ganze Zahl.

(f) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k},$

(g) $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}.$