

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 03

Abgabe: 17. November 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $1 + 2 + 1 + 1 = 5$ Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet.

- (a) Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine solche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

- (i) $|2a_n - a_n^2| < \varepsilon$,
 - (ii) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
- (b) Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.
- (i) Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.
 - (ii) Das Produkt einer beliebigen Folge mit einer Nullfolge ist beschränkt.

Aufgabe 2 (K) $2 + (3 + 3) + 2 = 10$ Punkte. Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechenbeziehungsweise Beweisweg abzugeben.

- (a) Es seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a : \exists n \in \mathbb{N} : a \in A_n\}$$

ebenfalls abzählbar ist.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 4 (a).

- (b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

- (i) $a_n = (1 + 2(-1)^n)^n$,
- (ii) $a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}$.

- (c) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann eine Folge (a_n) existiert mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$.

Aufgabe 3.

- (a) Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (*durch Beweis oder Gegenbeispiel*), welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

- (i) $|a_n| < \sqrt{\varepsilon}$,
 - (ii) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
- (i) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls konvergent.
 - (ii) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls beschränkt.

Aufgabe 4.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$$

bijektiv ist.

- (b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

- (i) $a_n = \sqrt{4n^2 + n + 5} - 2$,
- (ii) $a_n = \frac{(n+2)^3 - (n-1)^3}{(n-1)^2 + 2n^2 + 5}$.

- (c) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b . Zeigen Sie, dass die Folge $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) gegen $\max\{a, b\}$ konvergiert.

- (d) Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{2}{3}(1 - \frac{(-1)^n}{2^n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Prüfen Sie diese Folge zudem auf Konvergenz.