Karlsruher Institut für Technologie

17. November 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 03

Aufgabe 1 (K) $1 + 2 + 1 + 1 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet*.

(a) Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine solche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(i) $|2a_n - a_n^2| < \varepsilon$,

(ii) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

(i) Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.

(ii) Das Produkt einer beliebigen Folge mit einer Nullfolge ist beschränkt.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Definiere die Folge $a_n = 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Diese erfüllt offensichtlich die Bedingung, ist aber keine Nullfolge.

(ii) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Die Bedingung besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt die Ungleichung dann auch für $m = n$ und man erhält

$$|a_n \cdot a_n| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n|^2 < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Dies entspricht gerade der Bedingung aus Aufgabe 3 (a) (i), woraus die Behauptung folgt.

(b) (i) *Behauptung:* Die Aussage ist wahr.

Es seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, das heißt, $|b_n| \leq B$ für ein $B \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass dann auch die Folge (c_n) definiert durch $c_n = a_n \cdot b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge ist: es sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{B}$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt

$$|c_n| = |a_n||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

das heißt, (c_n) konvergiert gegen 0.

(ii) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Definiere $a_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (b_n) ist eine Nullfolge, aber die Folge $c_n = a_n \cdot b_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist unbeschränkt. □

Aufgabe 2 (K) 2 + (3 + 3) + 2 = 10 Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a : \exists n \in \mathbb{N} : a \in A_n\}$$

ebenfalls abzählbar ist.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 4 (a).

(b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $a_n = (1 + 2(-1)^n)^n$,

(ii) $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}$.

(c) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann eine Folge (a_n) existiert mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

Lösungsvorschlag.

(a) Nach Voraussetzung existiert zu jeden $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $\varrho_n : \mathbb{N} \to A_n$. Wir definieren

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (n,k) \mapsto \varrho_n(k).$$

Die Funktion h ist surjektiv: Sei $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in A_n$. Da $\varrho_n : \mathbb{N} \to A_n$ surjektiv ist, existiert auch ein $k \in \mathbb{N}$ mit $y = \varrho_n(k) = h(n,k)$. Nach Aufgabe 4 (a) ist die dort definierte Abbildung g bijektiv, also insbesondere auch die Umkehrabbildung $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Insgesamt ist also auch die Funktion $f = h \circ g^{-1} : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ surjektiv. Somit ist die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar.

(b) (i) *Behauptung:* Die Folge (a_n) divergiert.

Da konvergente Folgen immer beschränkt sind (Satz 2.1 (b)), reicht es zu zeigen, dass die Folge (a_n) unbeschränkt ist. Wir zeigen daher:

$$\forall s > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : a_n > s. \tag{1}$$

Es sei also $s > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{s}{4}$ und definiere $n = 2k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$a_n = (1 + 2(-1)^n)^n = (1 + 2(-1)^{2k})^{2k} = (1+2)^{2k} \geq 1 + 4k > 4k > s,$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung verwendet haben.

(ii) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

Nach Vorlesung gilt: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt (mit Satz 2.2):

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{\sum_{k=1}^n k}{2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2\frac{n(n+1)}{2} - n} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

(c) Da A nichtleer und nach oben beschränkt ist, existiert $\sup A \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$. Nach der Definition des Supremums gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit

$$a_n > \sup A - \varepsilon_n.$$

Da das Supremum eine obere Schranke von A ist, gilt außerdem $a_n \leq \sup A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen erhalten wir

$$|a_n - \sup A| \leq \varepsilon_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Satz 1.3 (c) ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Somit gilt

$$|a_n - \sup A| \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$$

für alle $n \geq k_\varepsilon$. Also konvergiert (a_n) gegen $\sup A$. □

Aufgabe 3.

(a) Eine Folge heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert. Es sei (a_n) eine reelle Folge. Entscheiden Sie jeweils (*durch Beweis oder Gegenbeispiel*), welche der folgenden Bedingungen erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(i) $|a_n| < \sqrt{\varepsilon}$,

(ii) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls konvergent.

(ii) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls beschränkt.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Bedingung (a) impliziert, dass für $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^2 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - 0| = |a_n| < \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \varepsilon$, das heißt, (a_n) konvergiert gegen 0.

(ii) *Behauptung:* Diese Bedingung erzwingt nicht, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ n & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$a_n a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n^2} \leq \dfrac{n + n/2}{n} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{n}, & n \text{ gerade,} \\ \dfrac{n}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n} < \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 3/2 \cdot 1/\varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n \cdot a_{n+1}| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) erfüllt somit die geforderte Bedingung, sie ist aber keine Nullfolge (konvergiert nicht einmal).

(b) (i) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Es sei $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ eine konstante Folge, die somit auch gegen 1 konvergiert. Definiere weiter $b_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (b_n) ist beschränkt, denn $|b_n| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Aber die Folge (c_n) mit $c_n = a_n \cdot b_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist nicht konvergent (siehe Vorlesung).

(ii) *Behauptung:* Die Aussage ist wahr.

Es seien (a_n) eine konvergente Folge und (b_n) eine beschränkte Folge (das heißt, $|b_n| \leq B$ für ein $B \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$). Definiere $c_n = a_n \cdot b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Satz 2.1 (b) der Vorlesung ist die Folge (a_n) beschränkt, das heißt, $|a_n| \leq A$ für ein $A \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt: $|c_n| = |a_n||b_n| \leq A \cdot B =: C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (c_n) ist also beschränkt und die Aussage somit bewiesen. $\square$

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$$

bijektiv ist.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $a_n = \sqrt{4n^2 + n + 5} - 2$,

(ii) $a_n = \dfrac{(n+2)^3 - (n-1)^3}{(n-1)^2 + 2n^2 + 5}$.

(c) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Zeigen Sie, dass die Folge $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\max\{a, b\}$ konvergiert.

(d) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{2}{3}(1 - \frac{(-1)^n}{2^n})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Prüfen Sie diese Folge zudem auf Konvergenz.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir müssen zeigen, dass g sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Zur Injektivität: Seien $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gegeben mit $g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2)$. Wir nehmen an, dass $m_1 \neq m_2$. Sei ohne Einschränkung $m_1 > m_2$ (anderenfalls vertauschen wir zuerst (m_1, n_1) und (m_2, n_2)), also $k = m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$. Wir multiplizieren

$$2^{m_1-1}(2n_1 - 1) = g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2) = 2^{m_2-1}(2n_2 - 1) \qquad (\star)$$

mit 2^{1-m_2} und erhalten so $2^k(2n_1 - 1) = 2n_2 - 1$. Da die linke Seite gerade ist und die rechte Seite ungerade ist, kann Gleichheit nicht gelten und unsere Annahme muss falsch gewesen sein.

Also gilt $m_1 = m_2$ und aus $(\star)$ folgt $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$, also $n_1 = n_2$.

Zur Surjektivität: Sei $x \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass ein Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert mit $g(m, n) = x$.

Schritt 1: Wir zeigen, dass ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eine ungerade Zahl $u \in \mathbb{N}$ existieren mit $x = 2^k u$.

Sei hierfür $T = \{l \in \mathbb{N}_0 : 2^l \text{ teilt } x\}$. Dann ist $T \neq \emptyset$, denn $0 \in T$. Weiter ist T nach oben beschränkt, denn für $l \geq x$ gilt $2^l \geq 1 + l \geq 1 + x$ (nach Bernoulli-Ungleichung), weshalb 2^l für diese l kein Teiler von x sein kann. Somit existiert ein größtes Element $k = \max T$ von T. Nach Definition von T existiert ein $u \in \mathbb{N}$ mit $2^k u = x$.

Annahme: u ist gerade. Dann lässt sich u schreiben als $u = 2\tilde{u}$ mit $\tilde{u} \in \mathbb{N}$, und wir können $x = 2^{k+1}\tilde{u}$ schreiben, weshalb $k+1 \in T$ gilt. Dies widerspricht der Maximalität von k. Also muss die Annahme falsch gewesen sein.

Schritt 2: Wir definieren $m = k + 1 \in \mathbb{N}$ sowie $n = \frac{u+1}{2} \in \mathbb{N}$ (da $u \geq 1$ ungerade ist). Dann gilt $g(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1) = 2^k u = x$.

(b) (i) *Behauptung:* Die Folge (a_n) ist unbeschränkt und daher divergent.

Es gilt:

$$a_n \geq \sqrt{4n^2} - 2 = 2n - 2 = 2(n-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge (n) unbeschränkt ist, ist es auch die Folge (a_n), die somit divergiert.

(ii) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 3.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)}{n^2 - 2n + 1 + 2n^2 + 5} = \frac{9n^2 + 9n + 9}{3n^2 - 2n + 6} \\ &= \frac{9 + \frac{9}{n} + \frac{9}{n^2}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{9}{3} = 3, \end{aligned}$$

die Konvergenz gilt nach Satz 2.2.

(c) Wir zeigen zunächst:

$$\text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|). \tag{2}$$

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, es gilt also $x \leq y$ oder $y \leq x$. O.B.d.A. gelte $y \leq x$. Dann gilt $x - y \geq 0$ und somit

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x = \max\{x, y\},$$

womit (2) gezeigt wäre.

Nach Satz 2.2 gilt für die Folge (c_n):

$$c_n = \max\{a_n, b_n\} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \overset{(2)}{=} \max\{a, b\}.$$

(d) Wir beweisen die explizite Darstellung der Folge durch vollständige Induktion:

IA Für $n = 0$ gilt $a_0 = 0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^0}{2^0}\right)$ und für $n = 1$ gilt $a_1 = 1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^1}{2^1}\right)$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ und $a_{n-1} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$.

IS Es gilt mit der Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \overset{(IV)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 - \frac{4(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Weiter gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{2}{3} \cdot \left|\frac{1}{2^n}\right| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

das heißt, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$. $\square$