Karlsruher Institut für Technologie

24. November 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis)
für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 04

Aufgabe 1 (K) $3 + 2 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechenweg wird nicht bewertet.*

(a) Entscheiden Sie, ob die durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Schätzen Sie jeden Summanden möglichst gut nach oben und unten ab.

(b) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_N > 0$. Entscheiden Sie, ob die durch

$$b_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Damit folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

es gilt also

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq a_n \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$
folgt mit Satz 2.2 (e), dass (a_n) gegen 1 konvergiert.

(b) *Behauptung:* Die Folge (b_n) konvergiert gegen $\max\{a_j : 1 \le j \le N\}$.

Wir setzen $a_0 = \max\{a_j : 1 \le j \le N\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_0^n \le \sum_{k=1}^{N} a_k^n \le \sum_{k=1}^{N} a_0^n = N a_0^n.$$
Damit erhält man insbesondere
$$a_0 \le \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} = b_n \le \sqrt[n]{N} a_0$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Vorlesung gilt $\sqrt[n]{N} \to 1$ $(n \to \infty)$, also gilt $\sqrt[n]{N} a_0 \to a_0$ $(n \to \infty)$. Mit Satz 2.2 (e) folgt somit $b_n \to a_0$ $(n \to \infty)$. □

Aufgabe 2 (K) $3 + 3 + 4 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben***.**

(a) Untersuchen Sie die Folge (a_n) mit
$$a_n = \sqrt[n]{3 + 2\frac{n-1}{n+1}}$$
auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(b) Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit
$$a_1 = 2, \ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge (a_n) genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ wiederum eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ besitzt.

Hinweis: Sie dürfen Satz 2.11 verwenden.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Es gilt:
$$3 \le 3 + 2\frac{n-1}{n+1} \le 3 + 2\frac{n+1}{n+1} = 5 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit der Monotonie der n-ten Wurzel folgt:

$$\sqrt[n]{3} \leq a_n \leq \sqrt[n]{5}.$$

Nach Beispiel 2.8 aus der Vorlesung konvergieren sowohl $(\sqrt[n]{3})$ als auch $(\sqrt[n]{5})$ gegen 1. Nach Satz 2.2 (e) konvergiert damit auch (a_n) gegen 1.

(b) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass gilt: $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA Für $n = 1$ gilt $a_1 = 2 \geq 1$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n \geq 1$.

IS Nach der Induktionsvoraussetzung gilt insbesondere $a_n \geq 1 > 0$. Damit folgt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} = \frac{(a_n^2 - 2a_n + 1) + 2a_n}{2a_n} = \underbrace{\frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}}_{\geq 0} + 1 \geq 1.$$

Die Folge (a_n) ist somit nach unten beschränkt. Weiter gilt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_n^2}\right) \leq a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei in der Ungleichung ausgenutzt wurde, dass $a_n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Also ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach dem Monotoniekriterium konvergent. Setze $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $a \geq 1 > 0$. Es gilt (mit Satz 2.2):

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} = \frac{a^2 + 1}{2a}.$$

Es folgt also

$$2a^2 = a^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1 \vee a = -1.$$

Wegen $a \geq 1$ muss $a = 1$ gelten.

(c) »$\Longrightarrow$« Es sei (a_n) eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge. Nach Satz 2.11 ist jede Teilfolge von (a_n) konvergent und hat denselben Grenzwert. Also konvergiert jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (a_n) gegen a für $k \to \infty$ und besitzt daher eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$, nämlich $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ selbst, die für $j \to \infty$ gegen a konvergiert.

»$\Longleftarrow$« Angenommen, die Folge (a_n) konvergiert nicht gegen a für $n \to \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von (a_n) und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\left|a_{n_k} - a\right| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Nach Voraussetzung besitzt die Folge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ aber eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_{k_j}} \to a$ $(j \to \infty)$. Dies ist ein Widerspruch zu (1). Somit war die Annahme falsch und es gilt, dass (a_n) gegen a konvergiert. $\square$

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(i) $a_n = \sqrt[n]{-n + 2n^2}$,

(ii) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.

Hinweis: Sie dürfen Satz 2.11 verwenden.

(b) Es sei $b \in (0, \infty)$ und $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b^{-1}$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n = 2a_{n-1} - ba_{n-1}^2$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Es gilt:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{-n + 2n} \leq \sqrt[n]{-n + 2n^2} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Folgen $(\sqrt[n]{2})$ und $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergieren (siehe Beispiele 2.7 und 2.8), konvergiert nach Satz 2.2 auch die Folge (a_n) gegen 1 (für $n \to \infty$).

(ii) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Wir definieren die Folge $b_k = (1 + 1/k)^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach Beispiel 2.9 aus der Vorlesung konvergiert diese Folge und den Grenzwert definiert man als die Eulersche Zahl e. Nach Satz 2.11 konvergieren auch Teilfolgen konvergenter Folgen, und zwar gegen denselben Grenzwert. Somit konvergiert die Teilfolge $b_{2n} = (1 + 1/2n)^{2n}$ gegen e. Da $a_n = \sqrt{b_{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$, konvergiert (a_n) gegen $\sqrt{\mathrm{e}}$ (vergleiche Beispiel 2.4).

(b) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen den Grenzwert b^{-1}.

Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \in (0, b^{-1}]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA Für $n = 0$ gilt nach Voraussetzung $0 < a_0 \leq b^{-1}$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte bereits $0 < a_n \leq b^{-1}$.

IS Es gilt:

$$a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2 \overset{\text{(IV)}}{\geq} 2a_n - a_n^{-1}a_n^2 = a_n > 0. \tag{2}$$

Die Beschränktheit nach oben erfolgt durch direktes Berechnen:

$$a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2 = -b(a_n^2 - 2a_nb^{-1} + b^{-2} - b^{-2}) = -b\underbrace{(a_n - b^{-1})^2}_{\geq 0} + b^{-1} \leq b^{-1}.$$

Die Monotonie der Folge erhält man aus (2). Mit dem Monotoniekriterium folgt die Konvergenz der Folge, es sei a der Grenzwert. Damit folgt:

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} (2a_n - ba_n^2) = 2a - ba^2 \\ \iff a(a - b^{-1}) &= 0 \\ \iff a &= 0 \vee a = b^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \geq a_0 > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) folgt $a \geq a_0 > 0$ und somit konvergiert die Folge gegen b^{-1}. □

Aufgabe 4.

(a) Untersuchen Sie die folgende rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. $a_1 = 1/2,\ a_{n+1} = a_n - a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie für die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

einen geschlossenen Ausdruck an und prüfen Sie die Folge auf Konvergenz. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

Wir wenden das Monotoniekriterium an und zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

IA Für $n = 1$ gilt $a_1 = \frac{1}{2} \in (0,1)$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $a_n \in (0,1)$.

IS Es gilt:

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2 = \underbrace{a_n}_{\overset{\text{(IV)}}{\in} (0,1)} \cdot \underbrace{(1 - a_n)}_{\overset{\text{(IV)}}{\in} (0,1)} \in (0,1).$$

Insbesondere gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge (a_n) ist somit nach unten beschränkt. Zudem gilt $a_{n+1} = a_n - a_n^2 \leq a_n + 0 = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge (a_n) monoton fallend. Nach dem Monotoniekriterium (Satz 2.3) ist die Folge konvergent. Wir setzen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dann gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_n^2) = a - a^2.$$

Diese Gleichheit ist äquivalent zu $a^2 = 0$, was genau für $a = 0$ erfüllt wird. Dies zeigt die Behauptung.

(b) *Behauptung:* Es gilt:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n!} & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Folge konvergiert somit gegen 0.

Wir zeigen die behauptete Darstellung durch vollständige Induktion:

IA Für $n = 0$ gilt $a_0 = 1 = \frac{1}{1!}$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte die Darstellung bereits für a_n.

IS Wir unterscheiden die Fälle, dass n gerade bzw. ungerade ist. Es sei n zunächst gerade, das heißt, $n+1$ ist ungerade. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = 0,$$

das heißt, a_{n+1} erfüllt die gewünschte Darstellung. Es sei nun n ungerade. Dann folgt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{(n+1)!},$$

womit die Darstellung gezeigt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Es gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$|a_n - 0| \leq \left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \square$$