Karlsruher Institut für Technologie

24. November 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 05
Abgabe: 1. Dezember 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+(1+1+1)=5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Geben Sie zwei divergente Folgen (a_n) an, für die je eine der folgenden Bedingungen gelten.

(i) Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) Jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

(b) Bestimmen Sie für die Folgen (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte und geben Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ an.

(i) $a_n = (3 + (-1)^n)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(ii) $a_n = \left(\dfrac{n + 2(-1)^{n-1}}{n}\right)^n$,

Hinweis: Finden Sie Folgen, die gegen e *konvergieren.*

(iii) $a_n = 8^n \left(8 + \dfrac{12}{n} + \dfrac{6}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)^{-n}$.

Hinweis: Berechnen Sie $(2n+1)^3$.

Aufgabe 2 (K) $3 + (2+3) + 2 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es sei (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

(b) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Beweisen Sie:

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + 3k + 2}$$

auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die reelle Folge (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte. Falls die Folge beschränkt ist, geben Sie zusätzlich $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ an.

(a) $a_n = \sqrt[n]{1 + (-1)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n}, & n \text{ gerade}, \\ \dfrac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2 - (n-2)^2}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = \left(\dfrac{n + (-1)^n}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) $(a_n) = (1,\ 1, 2,\ 1, 2, 3,\ 1, 2, 3, 4,\ 1, 2, 3, 4, 5,\ 1, 2, 3, 4, 5, 6,\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ \dots)$.

Aufgabe 4.

(a) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Beweisen Sie:

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2 (b).

(ii) Gilt in Aufgabe 2 (b) (ii) beziehungsweise Teilaufgabe (i) sogar Gleichheit? Begründen Sie Ihre Antwort durch Beweis oder Gegenbeispiel.

(b) Es sei (a_n) eine reelle Folge. Mit $H(a_n)$ bezeichnen wir die Menge der Häufungswerte von (a_n). Weiter sei (b_k) eine reelle konvergente Folge mit $b_k \in H(a_n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} b_k \in H(a_n)$ gilt.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j)}\right)$.

Bei der Lösung dieses Blattes darf, sofern nicht anders angegeben, nur das Material verwendet werden, das bis zum 24. November 2023 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde