Karlsruher Institut für Technologie

1. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis)
für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 05

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+(1+1+1)=5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Geben Sie zwei divergente Folgen (a_n) an, für die je eine der folgenden Bedingungen gelten.

(i) Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) Jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

(b) Bestimmen Sie für die Folgen (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte und geben Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ an.

(i) $a_n = (3+(-1)^n)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(ii) $a_n = \left(\dfrac{n+2(-1)^{n-1}}{n}\right)^n$,

Hinweis: Finden Sie Folgen, die gegen e *konvergieren.*

(iii) $a_n = 8^n \left(8 + \dfrac{12}{n} + \dfrac{6}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)^{-n}$.

Hinweis: Berechnen Sie $(2n+1)^3$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Betrachte zum Beispiel die Folge (a_n) definiert durch
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
also die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe. Dann gilt:
$$a_{p+n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \to 0 \quad (n \to \infty)$$
für alle $p \in \mathbb{N}$, da jeder der endlich vielen Summanden für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Folge (a_n) divergiert jedoch, da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist (siehe Vorlesung).

(ii) Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Nach Vorlesung ist (a_n) divergent und beschränkt. Insbesondere ist jede Teilfolge (a_{n_k}) beschränkt und besitzt somit nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung: Diese Aussage widerspricht nicht dem Ergebnis von Aufgabe 2 (c) auf Übungsblatt 04, da dort gefordert wird, dass alle Teilfolgen den *gleichen* Grenzwert haben. Dies ist hier nicht der Fall.

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n) = \{-4, -2, 2, 4\}$ und somit $\limsup_{n\to\infty} a_n = 4$ sowie $\liminf_{n\to\infty} a_n = -4$.

Wir betrachten die Teilfolgen (a_{4k}), (a_{4k-1}), (a_{4k-2}) und (a_{4k-3}) $(k \in \mathbb{N})$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_{4k} &= (3 + (-1)^{4k})(-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} = 4 \cdot 1 \xrightarrow{k\to\infty} 4,\\
a_{4k-1} &= (3 + (-1)^{4k-1})(-1)^{\frac{(4k-1)(4k)}{2}} = 2 \cdot 1 \xrightarrow{k\to\infty} 2,\\
a_{4k-2} &= (3 + (-1)^{4k-2})(-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}} = 4 \cdot (-1) \xrightarrow{k\to\infty} -4,\\
a_{4k-3} &= (3 + (-1)^{4k-3})(-1)^{\frac{(4k-3)(4k-2)}{2}} = 2 \cdot (-1) \xrightarrow{k\to\infty} -2.
\end{aligned}$$

Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der drei Teilfolgen enthalten sind, hat (a_n) keine weiteren Häufungswerte und es gilt $H(a_n) = \{-4, -2, 2, 4\}$. Insbesondere ist die Folge beschränkt und es gilt nach Definition $\liminf_{n\to\infty} a_n = -4$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = 4$.

(ii) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n) = \{1/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2\}$ und somit $\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^2$ sowie $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1/\mathrm{e}^2$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = \left(1 + 2(-1)^{n-1}/n\right)^n$. Wir betrachten die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}). Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \left(1 + \frac{2(-1)^{2k-1}}{2k}\right)^{2k} = \left(1 - \frac{2}{2k}\right)^{2k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^2},\\
a_{2k-1} &= \left(1 + \frac{2(-1)^{2k-2}}{2k-1}\right)^{2k-1} = \left(1 + \frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^2.
\end{aligned}$$

Da alle Folgenglieder von (a_n) in einer der drei Teilfolgen enthalten sind, hat (a_n) keine weiteren Häufungswerte und es gilt $H(a_n) = \{1/\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2\}$. Insbesondere ist die Folge beschränkt und es gilt nach Definition $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1/\mathrm{e}^2$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^2$.

Bemerkung: Es gilt für $k \geq 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \left(\frac{k-1}{k}\right) \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k-1}{k} \cdot \left(\frac{1+k-1}{k-1}\right)^{-(k-1)} \\
&= \frac{k-1}{k} \cdot \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{-(k-1)} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^2 \xleftarrow{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} &\le \left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{2k-1} \le \left(1+\frac{2}{2k-2}\right)^{2k-1} \\
&= \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{2(k-1)} \cdot \left(1+\frac{1}{k-1}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^2,
\end{aligned}
$$

das heißt, $(1+2/(2k-1))^{2k-1}$ konvergiert gegen e^2 für $k \to \infty$.

(iii) *Behauptung:* Es gilt: $H(a_n) = \{\frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}\}$ und somit $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_n &= 8^n \left(\frac{8n^3+12n^2+6n+1}{n^3}\right)^{-n} = \left(\frac{8n^3}{8n^3+12n^2+6n+1}\right)^{n} = \left(\frac{(2n)^3}{(2n+1)^3}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{3n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-3n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n} \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}.
\end{aligned}
$$

Also ist (a_n) konvergent und die Behauptung folgt. □

Aufgabe 2 (K) $3 + (2+3) + 2 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es sei (a_n) eine Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert.

(b) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Beweisen Sie:

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+3k+2}$$

auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an.

Lösungsvorschlag.

(a) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt (Teleskopsumme)

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{j=n}^{m-1} (a_{j+1} - a_j)\right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| < \sum_{j=n}^{m-1} q^j < \sum_{j=n}^{\infty} q^j.$$

Wegen $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Das bedeutet, dass die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{j=n}^{\infty} q^j\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} q^j - \sum_{j=0}^{n-1} q^j\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq k_\varepsilon$. Für alle $m > n \geq k_\varepsilon$ gilt daher

$$|a_m - a_n| < \sum_{j=n}^{\infty} q^j < \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) ist also eine Cauchyfolge und somit konvergent.

(b) (i) Wir bemerken: Es gilt $H(-a_n) = \{-w : w \in H(a_n)\} =: -H(a_n)$.

Für $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in H(-a_n) &\iff \exists\, \mathrm{TF}\,(a_{n_k}) : -a_{n_k} \to b \iff \exists\, \mathrm{TF}\,(a_{n_k}) : a_{n_k} \to -b \\ &\iff -b \in H(a_n) \iff b \in -H(a_n). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \limsup(-a_n) &= \sup H(-a_n) = \sup(-H(a_n)) \\ &\overset{\substack{\text{Übungsblatt 01} \\ \text{Aufgabe 7 (b)}}}{=} -\inf H(a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n. \end{aligned}$$

(ii) Seien $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\beta = \limsup_{n\to\infty} b_n$. Sei nun $c \in H(a_n + b_n)$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mit $a_{n_k} + b_{n_k} \to c$ $(k \to \infty)$. Da $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ nach Voraussetzung beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_{k_j}} \to a$. Genauso existiert eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_{j_l}}})_{l=1}^{\infty}$ mit $b_{n_{k_{j_l}}} \to b$. Per Definition gelten $a \in H(a_n)$ und $b \in H(b_n)$, also $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Somit gilt

$$c \leftarrow a_{n_{k_{j_l}}} + b_{n_{k_{j_l}}} \to a + b \leq \alpha + \beta \quad (l \to \infty),$$

also $c \leq \alpha + \beta$. Da $c \in H(a_n + b_n)$ beliebig war, gilt auch $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \max H(a_n + b_n) \leq \alpha + \beta$.

(c) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 1.

Setze

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2 + 3k + 2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mithilfe einer Partialbruchzerlegung und einer Teleskopsumme erhält man

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}\right) = \frac{2}{2} - \frac{2}{n+2} \to \frac{2}{2} = 1 \quad (n \to \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen (s_n) gegen 1 konvergiert, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2/(k^2 + 3k + 2)$ konvergent mit Reihenwert 1. □

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die reelle Folge (a_n) jeweils die Menge aller Häufungswerte. Falls die Folge beschränkt ist, geben Sie zusätzlich $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ an.

(a) $a_n = \sqrt[n]{1 + (-1)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n}, & n \text{ gerade}, \\ \dfrac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2 - (n-2)^2}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = \left(\dfrac{n + (-1)^n}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) $(a_n) = (1,\ 1,2,\ 1,2,3,\ 1,2,3,4,\ 1,2,3,4,5,\ 1,2,3,4,5,6,\ 1,2,3,4,5,6,7,\ \dots)$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Es gelten $H(a_n) = \{0, 1\}$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

Es gelten $a_{2k} = \sqrt[n]{2} \to 1$ $(k \to \infty)$ sowie $a_{2k-1} = 0 \to 0$ $(k \to \infty)$. Also sind 0 und 1 Häufungswerte von (a_n). Weiter sind $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ sowie $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ beschränkt, und damit auch (a_n).

Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert von (a_n), dann existiert eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Da n_k unendliche viele gerade oder unendlich viele ungerade Folgenglieder besitzt, gilt nach obigem entweder $a_{n_k} \to 1$ oder $a_{n_k} \to 0$.

Wir halten fest: Es gelten $H(a_n) = \{0, 1\}$, und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(a_n) = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(a_n) = 1$.

(b) *Behauptung:* Es gilt $H(a_n) = \{0\}$ und (a_n) ist nicht beschränkt.

Wir betrachten die Folgen $(b_{2n}), (c_n)$ mit $b_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n}$, $c_n = (n^2{-}n{+}1)/((n{+}1)^2{-}(n{-}2)^2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Vorlesung konvergiert (b_n) gegen 0. Für (c_n) berechnen wir:

$$c_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 1 - n^2 + 4n - 4} = \frac{n^2 - n + 1}{6n - 3} = n \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 - \frac{3}{n}}.$$

Für $n \geq 2$ folgt:

$$c_n \geq n\frac{1-\frac{1}{2}+0}{6-0} = \frac{1}{12}n.$$

Es folgt, dass (c_n) keine beschränkten Teilfolgen besitzt (Wieso gilt das?). Insbesondere ist (a_n) nicht beschränkt.

Nun zurück zur Folge (a_n): Sei (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge. Nach obigem kann $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ höchstens endlich viele ungerade Indizes besitzen, und ist somit (bis auf endlich viele Indizes) eine Teilfolge von (b_{2n}). Für den Grenzwert gilt also $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. Wir haben gezeigt: $H(a_n) \subseteq \{0\}$. Umgekehrt konvergiert die Folge $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ als Teilfolge von (b_n) gegen 0, das heißt, 0 ist tatsächlich ein Häufungspunkt von (a_n).

(c) *Behauptung:* Es gelten $H(a_n) = \{1/\mathrm{e}, \mathrm{e}\}$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1/\mathrm{e}$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

Nach Vorlesung konvergiert $((1+1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ für $n \to \infty$ gegen e. Nach Übung konvergiert $((1-1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ für $n \to \infty$ gegen 1/e. Nach Vorlesung konvergieren auch alle Teilfolgen dieser Folgen gegen denselben Grenzwert.

Also konvergiert die Folge $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ wegen $a_{2k} = (1+1/(2k))^{2k}$ gegen e, und die Folge $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ konvergiert wegen $a_{2k-1} = (1-1/(2k-1))^{2k-1}$ gegen 1/e. Insbesondere sind beide Folgen beschränkt, und damit ist auch (a_n) beschränkt.

Ist $a \in \mathbb{R}$ eine Häufungswert von (a_n), dann existiert eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Da n_k unendliche viele gerade oder unendlich viele ungerade Folgenglieder besitzt, gilt nach obigem entweder $a_{n_k} \to \mathrm{e}$ oder $a_{n_k} \to 1/\mathrm{e}$.

Es gelten also $H(a_n) = \{1/\mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1/\mathrm{e}$ sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

(d) *Behauptung:* Es gilt $H(a_n) = \mathbb{N}$ und (a_n) ist unbeschränkt.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir verwenden Satz 2.10.

Fall 1. Ist $a \in \mathbb{N}$, dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a$. Also ist a ein Häufungswert von (a_n).

Fall 2. Ist $a \notin \mathbb{N}$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass keine natürliche Zahl in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegt. Denn es existiert eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq a < z+1$. Falls $a \notin \mathbb{Z}$, wähle für ε zum Beispiel den Abstand zur nächsten ganzen Zahl $\varepsilon = \min\{a-z, z+1-a\}$. Falls $a \in \mathbb{Z}$, wähle zum Beispiel $\varepsilon = 1$.

Da $(a-\varepsilon, a-\varepsilon)$ keine natürliche Zahl enthält, enthält es auch keine Folgenglieder (a_n). Also ist a kein Häufungswert von (a_n).

Da (a_n) unbeschränkt ist, sind $\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ nicht nach Vorlesung erklärt. □

Aufgabe 4.

(a) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Beweisen Sie:

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2 (b).

(ii) Gilt in Aufgabe 2 (b) (ii) beziehungsweise Teilaufgabe (i) sogar Gleichheit? Begründen Sie Ihre Antwort durch Beweis oder Gegenbeispiel.

(b) Es sei (a_n) eine reelle Folge. Mit $H(a_n)$ bezeichnen wir die Menge der Häufungswerte von (a_n). Weiter sei (b_k) eine reelle konvergente Folge mit $b_k \in H(a_n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} b_k \in H(a_n)$ gilt.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j)}\right)$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Mit Aufgabe 2 (b) (i) und (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) &\overset{\text{(i)}}{=} -\limsup_{n\to\infty}(-(a_n+b_n)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{\geq} -\limsup_{n\to\infty}(-a_n) - \limsup_{n\to\infty}(-b_n) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n,\end{aligned}$$

also die Behauptung.

(ii) Wir betrachten die Folgen (a_n) und (b_n) definiert durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$\underbrace{\limsup_{n\to\infty} a_n}_{=1} + \underbrace{\limsup_{n\to\infty} b_n}_{=1} = 2 \quad \text{und} \quad \underbrace{\liminf_{n\to\infty} a_n}_{=-1} + \underbrace{\liminf_{n\to\infty} b_n}_{=-1} = -2.$$

Weiter gilt $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit gelten

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,\\ \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0 > -2 = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_k) konvergiert, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_k - b| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$, insbesondere also $|b_{k_0+1} - b| < \varepsilon/2$. Da aber $b_{k_0} \in H(a_n)$, das heißt, b_{k_0} ist Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, gilt $|a_n - b_{k_0+1}| < \varepsilon/2$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|a\_b| = |a_n - b_{k_0} + b_{k_0} - b| \leq |a_n - b_{k_0}| + |b_{k_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

das heißt, b ist nach Satz 2.10 ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, also $b \in H(a_n)$.

(c) (i) *Behauptung:* Die Reihe divergiert.

Setze

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Durch Erweitern und mithilfe einer Teleskopsumme erhält man

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen (s_n) ist unbeschränkt und somit divergent, was bedeutet, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})$ divergiert.

(ii) *Behauptung:* Die Reihe konvergiert und hat den Reihenwert 4.

Setze

$$a_m = \sum_{j=0}^{m} 2^{-(k+j)}$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$. Mit der geometrischen Summenformel erhält man (für alle $k \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right) \to 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \quad (m \to \infty). \end{aligned}$$

Setze

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j)} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt, ebenfalls mit der geometrischen Summenformel,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \to 4 \quad (n \to \infty).$$

Aus der Konvergenz der Folge der Partialsummen (s_l) gegen 4 folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j)} \right)$ und dass ihr Reihenwert 4 ist. □