1. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Karlsruher Institut für Technologie

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 06

Abgabe: 8. Dezember 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $1 + (1 + 1) + (1 + 1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Geben Sie ein Beispiel einer solchen konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und einer solchen Nullfolge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergiert.

(b) Geben Sie den Reihenwert der jeweiligen Reihe an.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Hinweis: Teleskopsumme.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{n^4 + n^3 - 15n - 1}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$.

Aufgabe 2 (K) $3 + 3 + (2 + 2) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Sei (a_n) eine derartige monoton fallende Folge, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

(b) Sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$$

konvergiert. Gilt diese Aussage auch, wenn (a_n) nicht beschränkt ist?

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$.

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$,

(b) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2+n}{n^3+1}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 (b).

Aufgabe 4.

(a) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls absolut konvergiert.

(b) Es sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Dann kann man zeigen, dass die folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (\star)$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $(\star)$, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$ gilt.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 1. Dezember 2023 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde