Karlsruher Institut für Technologie

8. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 06

Aufgabe 1 (K) $1 + (1+1) + (1+1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Geben Sie ein Beispiel einer solchen konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und einer solchen Nullfolge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergiert.

(b) Geben Sie den Reihenwert der jeweiligen Reihe an.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Hinweis: Teleskopsumme.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ definiert ein zulässiges Beispiel.

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wie man leicht sehen kann, und (b_n) ist eine Nullfolge. Aber es gilt $a_n \cdot b_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist divergent nach Vorlesung.

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)/3^n = 3/4$.

Wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Bei dem Term auf der rechten Seite handelt es sich um eine Summe von geometrischen Reihen, die nach Vorlesung konvergieren. Dabei gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \overset{\substack{\text{substituiere} \\ m=n-1}}{=} q \sum_{m=0}^{\infty} q^m \overset{\text{nach Vorlesung}}{=} \frac{q}{1-q}$$

für $q \in (-1,1)$. Somit erhalten wir für den Reihenwert nach Vorlesung und obigem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{-1}{3}}{1-\frac{-1}{3}} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\sum_{n=5}^{\infty} n/(n+1)! = 1/5! = 1/120$.

Es gilt für $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 5$:

$$\sum_{n=5}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=5}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=5}^{N} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{5!} - \frac{1}{(N+1)!}.$$

Für $N \to \infty$ konvergiert $1/(N+1)!$ gegen 0, und somit erhalten wir den Reihenwert:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=5}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{5!} - \frac{1}{(N+1)!} = \frac{1}{5!} - 0.$$

(c) (i) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=-7}^{\infty} (n^2+3n)/(n^4+n^3-15n-1)$ konvergiert absolut.

Wir verwenden das Majorantenkriterium. Dazu sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 4$. Wir schätzen ab:

$$n^2 + 3n \leq 4n^2, \qquad n^4 + n^3 - 15n - 1 \geq n^4 + n \cdot 4^2 - 15n - n = n^4$$

und erhalten somit

$$\left|\frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}\right| = \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1} \leq \frac{4n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2}.$$

Nach Vorlesung konvergiert $\sum_{n=4}^{\infty} 4/n^2$, weswegen $\sum_{n=-7}^{\infty} (n^2+3n)/(n^4+n^3-15n-1)$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.

(ii) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-1)^{n+1}/n^n$ divergiert.

Wir zeigen, dass $(-1)^n (n-1)^{n+1}/n^n$ keine Nullfolge bildet. Nach Vorlesung kann die Reihe in diesem Fall nicht konvergieren. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Es gilt:

$$\left|(-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}\right| = \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n} \geq \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} > 0, \quad (n \to \infty).$$

Nach Satz-3.1 (c) divergiert die Reihe also.

□

Aufgabe 2 (K) 3 + 3 + (2 + 2) = 10 Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Sei (a_n) eine derartige monoton fallende Folge, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

(b) Sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

konvergiert. Gilt diese Aussage auch, wenn (a_n) nicht beschränkt ist?

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$.

Lösungsvorschlag.

(a) Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist (a_n) eine Nullfolge. Wegen der Monotonie erhalten wir somit $a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz der Reihe liefert das Cauchy-Kriterium die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } m > n \geq n_0.$$

Speziell für $n = n_0$ gilt also

$$\sum_{k=n_0+1}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } m \geq n_0.$$

Da (a_n) monoton fällt, erhalten wir außerdem

$$\sum_{k=n_0+1}^{m} a_k \geq \sum_{k=n_0+1}^{m} a_m = (m - n_0)a_m \quad (m \geq n_0).$$

Insgesamt finden wir

$$ma_m < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 a_m \quad (m \geq n_0).$$

Da (a_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_m < \varepsilon/(2n_0)$ für alle $m \geq n_1$. Somit gilt

$$0 \leq ma_m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } m \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}/a_n - 1)$ konvergiert. Diese Aussage wird ist im Allgemeinen falsch, wenn man nicht verlangt, dass (a_n) beschränkt ist.

Da (a_n) wächst, gilt $a_{n+1}/a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen das Majorantenkriterium verwenden und schätzen dazu ab:

$$0 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} b_n.$$

Nun konvergiert die Reihe über (b_n), da die Partialsummen beschränkt sind. In der Tat gilt für $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{a_{N+1} - a_1}{a_1} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n - a_1}{a_1}.$$

Um zu zeigen, dass die Aussage im Allgemeinen für unbeschränkte Folgen (a_n) falsch ist, betrachten wir als Beispiel $a_n := 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_{n+1}/a_n - 1 = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, hier ist der Summand keine Nullfolge. Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}/a_n - 1)$ divergiert nach Vorlesung, Satz 3.1 (c).

(c) (i) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}/(n+1)$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

Wir definieren die Folge (a_n) durch $a_n := (-1)^n\sqrt{n}/(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mithilfe des Leibniz-Kriteriums. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist alternierend, und es gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+1)^2}{n(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n}} \\ &\leq \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+n}{n^3+4n^2+4n}} = \sqrt{\frac{n^3+3n^2+4n}{n^3+4n^2+4n}} \leq \sqrt{1} = 1,\end{aligned}$$

also $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. Somit ist $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}|a_n|$ konvergent.

Aus Beispiel (e) vor Hilfssatz 3.6 folgt, dass die Reihe nicht absolut konvergiert.

(ii) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}/(n^2+3)$ konvergiert absolut.

Wir verwenden das Majorantenkriterium. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Nach Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}/(n^2 + 3)$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergiert. $\square$

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3 + 1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 (b).

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Reihe ist absolut konvergent.

Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{n^5}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{5} \cdot (\sqrt[n]{n})^5 = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n} \cdots \sqrt[n]{n}}_{\text{5 Faktoren}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{\text{5 Faktoren}} < 1.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^5/5^n$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

(b) *Behauptung:* Die Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Definiere die Folge (b_n) durch

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

das heißt, (b_n) ist eine Nullfolge. Weiter gilt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leq b_n \quad &\iff \quad \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n} \quad \iff \quad \frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{n^2} \\ &\iff \quad n^3 + 2n^2 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \iff \quad 0 \leq n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Letzteres ist eine wahre Aussage, sodass (b_n) insgesamt eine monoton fallende Nullfolge ist. Nach dem Leibnizkriterium (Satz 3.3) ist die Reihe daher konvergent. Des Weiteren gilt

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \geq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}/n|$ ebenfalls. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}/n$ nicht absolut konvergent.

(c) *Behauptung:* Die Reihe ist absolut konvergent.

Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{(2n)!}{(3n)^n n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere ist $|a_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+2)!}{(3n+3)^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{(3n+3)\cdot(n+1)} \cdot \left(\frac{3n}{3n+3}\right)^n \\ &= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{3(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{3\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 4/(3\mathrm{e}) < 1$, nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)!/((3n)^n n!)$ daher absolut.

(d) *Behauptung:* Die Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Definiere die Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) durch

$$a_n = (-1)^n \underbrace{\frac{n^2}{n^3+1}}_{=b_n} + \underbrace{\frac{n}{n^3+1}}_{=c_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt:

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+1} \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

das heißt, (b_n) ist eine Nullfolge. Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & b_{n+1} \leq b_n \\ \iff & \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} \leq \frac{n^2}{n^3+1} \\ \iff & (n+1)^2 \cdot (n^3+1) \leq n^2 \cdot ((n+1)^3+1) \\ \iff & n^5 + n^2 + 2n^4 + 2n + n^3 + 1 \leq n^5 + 3n^4 + 3n^3 + 2n^2 \\ \iff & 0 \leq n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n - 1 \\ \iff & 0 \leq n^4 + 2n^3 + (n-1)^2 - 2. \end{aligned}$$

Letzteres ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, daher ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergent. Des Weiteren gilt:

$$|c_n| = \frac{1}{n^2 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Majorantenkriterium ebenfalls konvergent (sogar absolut konvergent). Insgesamt erhalten wir daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wir prüfen nun die Reihe noch auf absolute Konvergenz. Es gilt für $n \geq 2$:

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n n^2 + n}{1+n^3}\right| \geq \frac{n^2 - n}{1+n^3} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + n} \geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{2n} \geq \frac{1}{4n},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass gilt: $1/n^2 \leq 1 \leq n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $1 - 1/n \geq 1/2$ für $n \geq 2$. Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also nicht absolut konvergent.

(e) *Behauptung:* Die Reihe ist absolut konvergent.

Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir betrachten nun die Folge $b_n = \sqrt[n]{|a_n|} = 1/3\,(1 + (-1)^n/n)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Für die beiden Teilfolgen (b_{2k}) und (b_{2k-1}) gilt

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{3}, \\ b_{2k-1} &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Da die Folge (b_n) keine weiteren Häufungswerte hat und da $\mathrm{e} < 3$, gilt $\limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}/3 < 1$. Nach dem Wurzelkriterium ist somit also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3^n\,(1 + ((-1)^n)/n)^{n^2}$ absolut konvergent.

(f) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n n!)/n^n$ konvergiert absolut.

Wir verwenden das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2 \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty)$$

nach Aufgabe 4 (b), also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2^n n!)/n^n} = 2 \cdot 1/\mathrm{e} < 1$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut. □

Aufgabe 4.

(a) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls absolut konvergiert.

(b) Es sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Dann kann man zeigen, dass die folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (\star)$$

Zeigen Sie unter Verwendung von $(\star)$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$ gilt.

Lösungsvorschlag.

(a) Es bezeichne $C > 0$ eine Schranke von (b_n). Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$: $|a_n b_n| \leq C|a_n|$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(b) Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = n^n/n!$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Quotienten finden wir mit $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}$$

nach Definition von e. Insbesondere ist die Folge der Quotienten $(a_{n+1}/a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Nach $(\star)$ gilt nun:

$$\mathrm{e} = \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{e}.$$

Also gelten $\liminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}$, das heißt, e ist der einzige Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Die gewünschte Aussage folgt nun, da der einzige Häufungswert einer beschränkten Folge ihr Grenzwert ist.

Bemerkung: Die Beschränktheit von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n=1}^{\infty}$ ist durch $(\star)$ gewährleistet. □