Karlsruher Institut für Technologie

8. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 07

Abgabe: 15. Dezember 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $2 + (2 + 1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Entwickeln Sie die durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \mathrm{e}^x/(1-x)$ definierte Funktion in eine Potenzreihe um 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{n/2} x^n$.

Aufgabe 2 (K) $(2 + 2) + (2 + 2 + 2) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0 = 0$ und $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Zeigen Sie die Divergenz des Cauchyprodukts von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst. Begründen Sie, warum dies nicht dem Satz über die Konvergenz des Cauchyprodukts widerspricht.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2n}} (x+1)^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n!}} x^{3n}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (x-2)^{3n}$.

Aufgabe 3.

(a) Entwickeln Sie die durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto 1/(x^2 + x - 2)$ definierte Funktion in eine Potenzreihe um 0, und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe und das Cauchyprodukt.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{3n}}(x-1)^{3n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)x^n$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-2)^2}x^n$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{n^2}$,

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k}\right)x^n$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sum_{k=1}^{n!} 1/k \leq n^2$.

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ und berechnen Sie dessen Reihenwert.

(b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der beiden divergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_0 = -1$, $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_0 = 2$, $b_n = 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ absolut konvergiert.

(c) Untersuchen Sie jeweils, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an.

(i) $a_n = \frac{5^n}{n!}$, $b_n = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $a_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $b_0 = -1$, $b_n = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $a_n = \frac{n+1}{3^n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 8. Dezember 2023 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.