15. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 07

Aufgabe 1 (K) $2 + (2 + 1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Entwickeln Sie die durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \mathrm{e}^x/(1-x)$ definierte Funktion in eine Potenzreihe um 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-3n} x^n,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{n/2} x^n.$

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ ($n \in \mathbb{N}_0$), besitzt den Konvergenzradius 1 und für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \mathrm{e}^x/(1-x)$.

Es sei $x \in (-1, 1)$. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ in diesem Fall absolut konvergieren, folgt mit dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12), dass auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (x^k/k!) x^{n-k}\right)$ konvergiert und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} &= \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} x^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\end{aligned}$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ ($n \in \mathbb{N}$). Dies zeigt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ größer oder gleich 1 ist. Um zu zeigen, dass der Konvergenzradius gleich 1 ist, reicht es zu zeigen, dass die Potenzreihe in $x = 1$ divergiert, das heißt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert. Es gilt:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \neq 0,$$

also ist (c_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ somit divergent.

(b) (i) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n/(n+3))^{n^2-3n} x^n$ hat den Konvergenzradius e^3 und konvergiert genau dann, wenn $|x| < e^3$.

Setze $a_n = (n/(n+3))^{n^2-3n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{|a_n|} &= \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n-3} = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{3-n} = \left[\left(\frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-3}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} \\
&\quad \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^5 \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} e^{-3}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Konvergenzradius $1/(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}) = e^3$. Es sei nun $x \in \{\pm e^3\}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3k]{|a_{3k}x^{3k}|} &= \sqrt[3k]{\left(\frac{3k}{3k+3}\right)^{9k^2-9k}} e^3 = \left(\frac{3k+3}{3k}\right)^3 \left[\left(\frac{3k+3}{3k}\right)^{3k}\right]^{-1} e^3 \\
&= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3}_{\geq 1} \underbrace{\left(\frac{e}{(1+1/k)^k}\right)^3}_{\geq 1} \geq 1,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass die Folge $(1 + 1/k)^k$ monoton wachsend ist und gegen e konvergiert. Also ist $(a_n x^n)$ für $x \in \{\pm e^3\}$ keine Nullfolge, das heißt, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergiert, womit die Behauptung folgt.

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} n^{n/2} x^n$ hat den Konvergenzradius 0 und konvergiert daher nur für $x = 0$.

Definiere

$$a_n = n^{n/2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Da $(\sqrt{n})$ unbeschränkt ist, hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 0, sie konvergiert daher nur in $x = 0$. □

Aufgabe 2 (K) $(2 + 2) + (2 + 2 + 2) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0 = 0$ und $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Zeigen Sie die Divergenz des Cauchyprodukts von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst. Begründen Sie, warum dies nicht dem Satz über die Konvergenz des Cauchyprodukts widerspricht.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2n}}(x+1)^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n!}} x^{3n}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n (x-2)^{3n}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Die Folge $(1/\sqrt{n})$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 1/\sqrt{n}$ daher konvergent, also auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) Es bezeichne $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchyprodukt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst. Wegen $a_0 = 0$ gilt $c_0 = c_1 = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ berechnet man:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Weiter gilt:

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n-1}} = \frac{n-1}{n-1} = 1,$$

also ist (c_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ damit divergent.

Es gilt $|a_n| = 1/\sqrt{n}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ ist nicht konvergent, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut. Somit sind aber die Voraussetzungen des Satzes aus der Vorlesung über die Konvergenz des Cauchyprodukts (Satz 3.12) nicht erfüllt.

(b) (i) *Behauptung:* Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $r = 1/\varrho = \mathrm{e}^2$ und konvergiert genau für $x \in (-1-\mathrm{e}^2, -1+\mathrm{e}^2)$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = (-1)^n 1/(1+\mathrm{e}^{2n})$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2n}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-2n}+1}}.$$

Nun gilt $1 \leq \sqrt[n]{e^{-2n}+1} \leq \sqrt[n]{2}$, weshalb $\sqrt[n]{e^{-2n}+1}$ nach dem Sandwichkriterium für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Es folgt

$$\varrho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e^2},$$

weshalb der Konvergenzradius gegeben ist durch $r = 1/\varrho = e^2$. Die Potenzreihe konvergiert also absolut für $x \in (-1-e^2, -1+e^2)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R}\setminus[-1-e^2, -1+e^2]$. Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe auch für $x = -1 \pm e^2$ divergiert. Für diese beiden x gilt:

$$|a_n(x+1)^n| = \frac{1}{1+e^{2n}}\left(e^2\right)^n = \frac{1}{1+e^{-2n}} \to 1$$

für $n \to \infty$, das heißt, die Summanden bilden keine Nullfolge und die Reihe divergiert nach Vorlesung.

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $r = 1/\varrho = \infty$ und konvergiert entsprechend für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2^{n!}}, & \text{falls } k = 3n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 1/2^{n!} x^{3n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Nun gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[3n]{|a_{3n}|} = \sqrt[3n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{n!}}\right|} = 2^{-\frac{n!}{3n}} = \sqrt[3]{2^{-(n-1)!}} \leq \sqrt[3]{2^{-(n-1)}} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n \to 0$$

für $n \to \infty$. Also ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0,$$

und damit $r = \infty$. Nach Vorlesung konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) *Behauptung:* Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $r = 1/\varrho = 1/\sqrt[3]{3}$ und konvergiert genau für $x \in (2 - 1/\sqrt[3]{3}, 2 + 1/\sqrt[3]{3})$.

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_k = \begin{cases} (2 + (-1)^n)^n, & k = 3n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (x-2)^{3n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k$.

Wir betrachten die Teilfolgen $(a_{6m}), (a_{6m-3}), (a_{3m-1}), (a_{3m-2})$. Für diese gilt:

$$\sqrt[6m]{|a_{6m}|} = \sqrt[6m]{3^{2m}} = \sqrt[3]{3} \to \sqrt[3]{3} \quad (k \to \infty),$$

$$\begin{aligned}
\sqrt[6m-3]{|a_{6m-3}|} &= \sqrt[6m-3]{1} = 1 \to 1 && (k \to \infty),\\
\sqrt[3m-1]{|a_{3m-1}|} &= 0 \to 0 && (k \to \infty),\\
\sqrt[3m-2]{|a_{3m-2}|} &= 0 \to 0 && (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Insbesondere sind diese Teilfolgen beschränkt. Da alle Folgenglieder von (a_k) in einer dieser Teilfolgen vorkommen, ist $(\sqrt[k]{|a_k|})$ beschränkt und mit dem Lemma aus Übung 4 gilt $H(\sqrt[k]{|a_k|}) = \{0, 1, \sqrt[3]{3}\}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist gegeben durch

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Nach Vorlesung konvergiert die Potenzreihe absolut für $x \in (2 - 1/\sqrt[3]{3}, 2 + 1/\sqrt[3]{3})$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus [2 - 1/\sqrt[3]{3}, 2 + 1/\sqrt[3]{3}]$. Es bleibt zu zeigen, dass für $x = 2 \pm 1/\sqrt[3]{3}$ die Potenzreihe divergiert. Hierzu betrachten wir $k \in \mathbb{N}$ der Form $k = 6m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$a_k(x-2)^k = \left(2 + (-1)^{2m}\right)^{2m}(x-2)^{6m} = 3^{2m}\left(\pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{6m} = 1.$$

Die Reihe ist für diese beiden x divergent, da die Summanden keine Nullfolge bilden. $\square$

Aufgabe 3.

(a) Entwickeln Sie die durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto 1/(x^2 + x - 2)$ definierte Funktion in eine Potenzreihe um 0, und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe und das Cauchyprodukt.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{3n}}(x-1)^{3n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)x^n$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-2)^2}x^n$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{n^2}$,

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k}\right)x^n$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sum_{k=1}^{n!} 1/k \le n^2$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = -1/3\bigl(1 + (-1)^n/2^{n+1}\bigr)$ $(n \in \mathbb{N})$ hat Konvergenzradius 1 und für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1/(x^2 + x - 2)$.

Es sei $x \in (-1, 1)$. Dann konvergieren die beiden geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-x/2)^n$ absolut. Mit dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12) erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x/2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k \left(-\frac{x}{2}\right)^{n-k}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

mit $a_n = -1/3\bigl(1 + (-1)^n/2^{n+1}\bigr)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dies zeigt die behauptete Gleichheit sowie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ größer oder gleich 1 ist. Wir zeigen nun, dass die Reihe für $x = 1$ divergiert. Da $a_n \to -1/3$ für $n \to \infty$, ist (a_n) keine Nullfolge, folglich divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, woraus die Behauptung folgt.

(b) (i) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/((4 + (-1)^n)^{3n})(x - 1)^{3n}$ hat den Konvergenzradius 3 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-2, 4)$.

Substituiere $y = (x-1)^3$ und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ mit $a_n = 1/((4+(-1)^n)^{3n})$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Somit ist diese Potenzreihe absolut konvergent für $|y| < 27$ und divergent für $|y| > 27$. Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$|x-1|^3 = |y| < 27 \quad\iff\quad |x-1| < 3 \quad\iff\quad x \in (-2, 4),$$

das heißt, der Konvergenzradius beträgt 3. Zu prüfen sind nun noch die Randpunkte. Für $x = -2$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/((4 + (-1)^n)^{3n})(-1)^{3n}3^{3n}$, weil die Folge $(1/((4+(-1)^n)^{3n})(-1)^{3n}3^{3n})$ den Häufungswert -1 hat und somit keine Nullfolge ist. Die Potenzreihe divergiert also in $x = -2$. In $x = 4$ divergiert die Potenzreihe ebenso, da die Folge $(1/((4 + (-1)^n)^{3n})3^{3n})$ den Häufungswert 1 besitzt und somit ebenfalls keine Nullfolge sein kann. Daraus folgt die Behauptung.

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^n$ hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1, 1]$.

Es gilt

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Durch geeignetes Abschätzen erhält man mit dem Sandwich-Theorem, dass

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Daher ist der Konvergenzradius der Potenzreihe 1. In $x = 1$ gilt: wegen (1) ist $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. Im Fall $x = -1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt $1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \geq 1/(2\sqrt{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\sqrt{n+1}$ divergiert. Daraus folgt die Behauptung.

(iii) *Behauptung:* Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $r = 1/\varrho = 1$ und konvergiert genau für $x \in [-1, 1)$.

Wir halten zunächst fest: Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sqrt[n]{n+c}$ gegen 1 für $n \to \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |c| + 1$ gilt

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n-|c|} \leq \sqrt[n]{n+c} \leq \sqrt[n]{n+|c|} \leq \sqrt[n]{n+n-1} \leq \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n},$$

wobei untere und obere Schranke für $n \to \infty$ gegen 1 konvergieren. Nach dem Sandwichkriterium konvergiert auch $\sqrt[n]{n+c}$ gegen 1 für $n \to \infty$. Dies zeigt die Zwischenbehauptung.

Wir kehren zurück zu unserer Potenzreihe. Aus unserer Überlegung folgt:

$$\varrho = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2n+3}{(n-2)^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n+3/2}}{\sqrt[n]{n-2}\sqrt[n]{n-2}} = 1,$$

also $r = 1/\varrho = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe für $x = 1$ divergiert und für $x = -1$ konvergiert. Zunächst gilt für $x = 1$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$:

$$\frac{2n+3}{(n-2)^2}x^n = \frac{2n+3}{(n-2)^2} \geq \frac{2n-4}{(n-2)^2} = 2\frac{1}{n-2}.$$

Nach Vorlesung divergiert die Reihe

$$2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2} \overset{k=n-2}{=} 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

sodass $\sum_{n=3}^{\infty}(2n+3)/((n-2)^2)x^n$ nach dem Minorantenkriterium auch divergiert.

Weiter ist für $x = -1$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-2)^2} x^n = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n-2)^2}$$

Sei $a_n = (2n+3)/((n-2)^2)$ für $n \geq 3$. Bei dem Summanden $(-1)^n a_n$ handelt es sich um eine Nullfolge mit alternierendem Vorzeichen. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2n+5}{(n-1)^2} \cdot \left(\frac{2n+3}{(n-2)^2} \right)^{-1} \frac{(2n+5)(n-2)^2}{(n-1)^2(2n+3)} = \frac{2n^3 - 3n^2 - 12n + 20}{2n^3 - n^2 - 4n + 3} \\ &= 1 - \frac{2n^2 + 8n - 17}{2n^3 - n^2 - 4n + 3} \leq 1 - \frac{2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 17}{2n^3 - n^2 - 4n + 3} \leq 1. \end{aligned}$$

Somit konvergiert $\sum_{n=3}^{\infty} (2n+3)/((n-2)^2) x^n$ für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

(iv) *Behauptung:* Der Konvergenzradius ist 1 und die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [-1, 1]$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n}, & \text{falls } k = n^2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} n/2^n x^{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Nun gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ und für $k = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[n^2]{\frac{n}{2^n}} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 1,$$

denn

$$1 \xleftarrow{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{2^n}}{2}} = \sqrt[n]{1} \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ und der Konvergenzradius der Reihe beträgt 1. Zu prüfen sind nun noch die Ränder, sei dazu $x \in \{-1, 1\}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n/2^n x^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium, denn

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n}{2^n} \cdot x^{n^2} \right|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} < 1$$

und die Behauptung folgt.

(v) *Behauptung:* Der Konvergenzradius ist 1 und die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1, 1)$.

Definiere die Folge (a_n) durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir zeigen zunächst den Hinweis mittels vollständiger Induktion:

IA Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1!} \frac{1}{k} = 1 \leq 1^2$.

IV Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} \leq n^2$.

IS Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{(n+1)!} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k} + \sum_{k=n!+1}^{n!+n\cdot n!} \frac{1}{k} \overset{\text{(IV)}}{\leq} n^2 + \sum_{k=1}^{n\cdot n!} \frac{1}{n!+k} \leq n^2 + \frac{n \cdot n!}{n!+1} \\ &\leq n^2 + n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

das heißt, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Somit ist der Konvergenzradius 1 und die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $x = 1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da (a_n) keine Nullfolge ist. Auch die Folge $((-1)^n a_n)$ ist keine Nullfolge, daher divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also für $x \in (-1, 1)$. $\square$

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ und berechnen Sie dessen Reihenwert.

(b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt der beiden divergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_0 = -1$, $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_0 = 2$, $b_n = 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ absolut konvergiert.

(c) Untersuchen Sie jeweils, ob das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und geben Sie gegebenenfalls den Reihenwert an.

 (i) $a_n = \frac{5^n}{n!}$, $b_n = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$,

 (ii) $a_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $b_0 = -1$, $b_n = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$,

 (iii) $a_n = \frac{n+1}{3^n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist gegeben durch

$$\frac{15}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{-(n+1)} - 5^{-(n+1)}\right)$$

und sein Reihenwert ist 15/8.

Per Definition ist das Cauchyprodukt der beiden Reihen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} \cdot 5^{-(n-k)} = 5^{-n} \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} \cdot 5^k = 5^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{3}\right)^k$$

$$= 5^{-n}\frac{1-(5/3)^{n+1}}{1-5/3} = 5\cdot\frac{5^{-(n+1)}-3^{-(n+1)}}{-2/3} = \frac{15}{2}\left(3^{-(n+1)}-5^{-(n+1)}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ als geometrische Reihen absolut konvergieren mit $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 1/(1-\frac{1}{3}) = 3/2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} = 1/(1-\frac{1}{5}) = 5/4$ folgt mit Satz 3.12:

$$\frac{15}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{-(n+1)}-5^{-(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}.$$

Alternativ hätte man $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auch direkt ausrechnen können.

(b) Definiere die Folge (c_n) durch $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0 = -2, \\ c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = -2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n \cdot b_0 = -2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k} + 2 \\ &= 2 - 2^n + 2^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 2^n + 2^n \cdot \left(\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} - 1\right) \\ &= 2 - 2^{n+1} + 2^{n+1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = 2$, das Cauchyprodukt ist also absolut konvergent.

(c) Es bezeichne jeweils $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(i) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt konvergiert und der Reihenwert ist gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 2\mathrm{e}^5$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n/n!$ erkennen wir als Exponentialreihe. Nach Vorlesung konvergiert sie absolut und der Reihenwert ist gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n/n! = E(5) = \mathrm{e}^5$. Bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ handelt es sich um eine geometrische Reihe. Auch diese konvergiert nach Vorlesung absolut, und der Reihenwert ist $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1/1 - 1/2 = 2$. Somit konvergiert das Cauchyprodukt nach dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12) absolut. Der Reihenwert ist nach diesem Satz gegeben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \mathrm{e}^5 \cdot 2 = 2\mathrm{e}^5.$$

(ii) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt konvergiert und der Reihenwert ist gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -2$.

In diesem Beispiel ist Satz 3.12 nicht anwendbar, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ nicht absolut konvergiert. Wir schauen uns die Glieder c_n genauer an. Dafür sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k = -1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \overset{\substack{\text{geometrische} \\ \text{Summenformel}}}{=} -1 + \frac{1}{2} \frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}} = -2^{-n}.$$

Dabei ist für $n = 0$ die Summe $\sum_{k=1}^{0} b_k$ als 0 definiert. Somit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ als geometrische Reihe konvergent. Der Reihenwert ist nach Vorlesung gegeben durch $-\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = -1/1 - 1/2 = -2$.

(iii) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt konvergiert und der Reihenwert ist gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 9/(4\mathrm{e})$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)/(3^n)$ konvergiert nach Vorlesung, Beispiel nach Satz 3.12, absolut mit Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}.$$

Die zweite Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n!$ erkennen wir als Exponentialreihe, mit Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n! = E(-1) = \mathrm{e}^{-1}$. Somit konvergiert das Cauchyprodukt nach dem Satz über das Cauchyprodukt (Satz 3.12) absolut. Der Reihenwert ist nach diesem Satz gegeben als

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{9}{4} \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{9}{4\mathrm{e}}. \qquad \square$$