Karlsruher Institut für Technologie

15. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 08

Abgabe: 22. Dezember 2023, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) (i) Berechnen Sie die q-adische Entwicklung von $1/5$ für $q = 3$ und $q = 4$.

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und $0,212121\ldots$ die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = m/n$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist. Satz 6.3 dürfen Sie verwenden.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^r-1}{x-1}$ mit $r \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (K) $(3 + 1) + (3 + 2 + 1) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) (i) Beweisen Sie das Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Beweisen Sie das Additionstheorem $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ohne das Cauchyprodukt zu verwenden.

(b) Die Fibonacci-Folge (f_n) ist rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1}\ (n \geq 2).$$

Der goldene Schnitt sei mit φ und sein Konjugat mit ψ bezeichnet, wobei

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

In dieser Aufgabe finden wir eine geschlossene Formel für die Elemente der Fibonacci-Folge.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$
für alle x im Konvergenzradius der Reihe.

(ii) Finden Sie eine Potenzreihendarstellung von $x/(1-x-x^2)$.

Hinweis: Es gilt $-\varphi^{-1} = \psi$.

(iii) Finden Sie eine geschlossene Formel für f_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nutzen Sie hierbei, dass zwei Potenzreihen genau dann übereinstimmen, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. (Diesen Fakt müssen Sie nicht beweisen, dürfen ihn aber auch nicht ohne Beweis in anderen Aufgaben nutzen.)

Aufgabe 3.

(a) Sei $q \in \mathbb{N}, q \geq 4$ und $0,321321321\ldots$ die die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = m/n$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Der Definitionsbereich sei dabei jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die der Ausdruck erklärt ist. Satz 6.3 dürfen Sie verwenden.

(i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^3-27}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{12}{8-x^3}\right)$,

(iii) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x}{x^2-x-6}$.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Additionstheoreme folgende Formeln für $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,

(ii) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$,

(iii) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen *Sinus Hyperbolicus* und *Cosinus Hyperbolicus* definiert durch
$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(ii) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(iii) $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$.

(iv) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 15. Dezember 2023 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.