22. Dezember 2023
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Karlsruher Institut für Technologie

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 09

Abgabe: 12. Januar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+1+(1+1)=5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^{3/2}-x^{3/2}}{\sqrt{x}}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{|x|}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(b) Wie müssen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1/x+1}-\sqrt{x+1}}{x-1}, & \text{für } x>1, \\ \beta, & \text{für } x=1, \\ \alpha\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, & \text{für } 0<x<1, \end{cases}$$

auf $(0,\infty)$ stetig ist?

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen für alle Funktionen $f, g\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ gelten:

(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ und $|g(x)| \le 42$ für $x\in(0,1) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x)^2$ existiert $\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)$ existiert.

Aufgabe 2 (K) $(1+1)+(2+2)+2+2=10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie jeweils, ob der Grenzwert existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Wert.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^5\left[\dfrac{1}{x}\right]$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie, dass f in 0 stetig ist.

(c) Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \dfrac{4x - 6}{x + 1}, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

stetig ist.

(d) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgende Gleichung eine Lösung $x > 0$ besitzt.

$$\mathrm{e}^{\cos(x^2)} + \sin(x)^2 = \sqrt{x}$$

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} \left\lfloor \dfrac{2x + 1}{1 + x^2} \right\rfloor$.

(b) (i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 9}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \\ \dfrac{5}{2}, & x = -3, \\ \dfrac{3}{2}, & x = 3. \end{cases}$$

(ii) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2 - x}, & x \leq 1, \\ \dfrac{x^3 - \alpha^2 x}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

stetig ist.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 4 (a).

Aufgabe 4.

(a) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt sowohl von $D \cap (-\infty, x_0)$ als auch von $D \cap (x_0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert} \\ \iff &\lim_{x \to x_0+} f(x), \lim_{x \to x_0-} f(x) \text{ existieren und } \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x), \end{aligned}$$

und dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$.

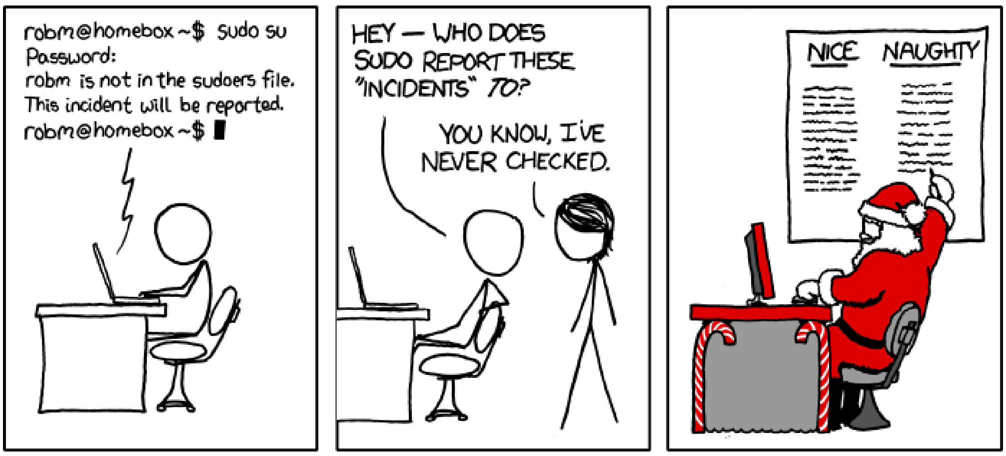
(b) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgende Gleichung eine Lösung $x > 0$ besitzt:

$$e^{\cos(x)} - x^7 = \sin(x^3).$$

Aufgabe 5 *In dieser Weihnachtsaufgabe können Sie bis zu fünf Bonuspunkte sammeln.* Am letzten Schultag vor Weihnachten hat der Lehrer des kleinen Gauß' keine Lust mehr, Unterricht vorzubereiten. Stattdessen gibt er allen in der Klasse je ein kleines Gerät. Jedes Gerät hat ein unbekanntes Polynom p beliebigen Grades mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$ eingespeichert. Auf einer Tastatur kann man einen Wert in $x \in \mathbb{R}$ eingeben und das Gerät gibt auf einem kleinen Bildschirm den Wert $p(x)$ aus. Da es im Allgemeinen eine lange Rechnung benötigt, die Koeffizienten eines allgemeinen Polynoms unbekannten Grades zu bestimmen, geht der Lehrer davon aus, dass die Klasse ziemlich lange damit beschäftigt sein werden. Daher sagt ihnen der Lehrer, dass sie gehen können, wenn sie herausgefunden haben, welches Polynom in ihrem Gerät gespeichert ist. Nach fünf Minuten nennt der kleine Gauß das Polynom in seinem Gerät und geht nach Hause, um ein bisschen Mathe zu machen.

Wie viele und welche Anfragen musste der kleine Gauß an das Gerät stellen? Beweisen Sie.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 22. Dezember 2023 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.



Quelle: `https://xkcd.com/838/`