Karlsruher Institut für Technologie

12. Januar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 10

Abgabe: 19. Januar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+(1+2) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Es seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) A beschränkt $\implies$ $f(A)$ beschränkt.

(ii) B beschränkt $\implies$ $f^{-1}(B)$ beschränkt.

(b) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^{x^2} - 1}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log(x)$.

Aufgabe 2 (K) $2+(1+1+2)+(2+2) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

(b) (i) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(ii) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

(iii) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie die Existenz von $x_1 \in [0, 1/2]$ mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $D = \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$,

(ii) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \log(x)$.

Aufgabe 3.

(a) Es seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) A abgeschlossen $\implies$ $f(A)$ abgeschlossen.

(ii) B abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(b) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha^x - 1}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha}$.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit:

(i) $D = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$,

(ii) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 4.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f: [a, b] \to [a, b]$ sei stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, das heißt, es existiert ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Gilt diese Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch ein beliebiges Intervall ersetzt wird?

(b) Die Funktion $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f.

(iii) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(iv) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

(c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Ist eine Funktion $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 12. Januar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.