Karlsruher Institut für Technologie

19. Januar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (K) $(1 + 1) + (1 + 2) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) A beschränkt $\implies$ $f(A)$ beschränkt.

(ii) B beschränkt $\implies$ $f^{-1}(B)$ beschränkt.

(b) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^{x^2} - 1}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log(x)$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* A beschränkt $\implies$ $f(A)$ beschränkt.

Da A beschränkt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $|x| \leq M$ für alle $x \in A$, das heißt, es gilt $A \subseteq [-M, M]$. Da das Intervall $[-M, M]$ kompakt ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch $f([-M, M])$ nach Satz 7.11 kompakt. Insbesondere ist also $f([-M, M])$ beschränkt. Nach Wahl von M gilt $f(A) \subseteq f([-M, M])$, also ist $f(A)$ als Teilmenge einer beschränkten Menge selbst beschränkt.

(ii) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ und $B = \{0\}$ ist B beschränkt, aber $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0}(\alpha^{x^2} - 1)/x = 0$.

Gemäß Aufgabe 3 (b) (i) gilt

$$\lim_{y\to 0} \frac{\alpha^y - 1}{y} = \log(\alpha).$$

Wegen $y = x^2 \to 0$ für $x \to 0$ erhalten wir mit der Substitution $y = x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{x^2} - 1}{x^2} \cdot x = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha^y - 1}{y} \cdot \lim_{x\to 0} x = \log(\alpha) \cdot 0 = 0.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = 0$.

Gemäß Aufgabe 3 (b) (ii) gilt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log(y)}{y^\alpha} = 0.$$

Wegen $y = 1/x \to \infty$ für $x \to 0+$ erhalten wir mit der Substitution $y = 1/x$:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (K) $2+(1+1+2)+(2+2) = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass D genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion auf D beschränkt ist.

(b) (i) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(ii) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

(iii) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie die Existenz von $x_1 \in [0, 1/2]$ mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$,

(ii) $D = (0,\infty)$, $f(x) = \log(x)$.

Lösungsvorschlag.

(a) $\Longrightarrow$ Es seien D kompakt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Satz 7.11 ist $f(D)$ ebenfalls kompakt. Insbesondere ist $f(D)$ also beschränkt, das heißt, f ist auf D beschränkt.

$\Longleftarrow$ Es sei nun jede stetige Funktion auf D beschränkt. Insbesondere ist also die stetige Funktion $\mathrm{id}_D\colon D \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_D(x) = x$ auf D beschränkt. Also ist $D = \mathrm{id}_D(D)$ nach Voraussetzung beschränkt. Auf Grund von Satz 7.10 (b) bleibt noch zu zeigen, dass D abgeschlossen ist.

Angenommen D ist nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge (x_n) in D und ein $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Wir definieren die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 1/|x - x_0|$. Dann ist f stetig, denn die Betragsfunktion ist stetig und es gilt $x_0 \notin D$. Zudem gilt $f(x_n) = 1/|x_n - x_0| \to \infty$ für $n \to \infty$, also ist f unbeschränkt, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist D beschränkt und abgeschlossen, und somit nach Satz 7.10 (b) kompakt.

(b) (i) Sei $h = g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$ und $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Differenz der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

(ii) Setze $f(x) = 1/(1 + x^2)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ für jedes $x \in [0, \infty)$. Beide Funktionen sind stetig auf $[0, \infty)$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = 1/2 < 1 = g(1)$. Nach Teil (i) existiert also ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f(x_0) = 1/(1 + x_0^2) = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

(iii) Setze $g(x) = f(x + 1/2)$ für jedes $x \in [0, 1/2]$. Dann ist g stetig und es gilt

$$g(0) = f\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad g\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(1) = f(0).$$

Gilt $f(0) = g(0)$, so ist die Behauptung gezeigt mit $x_1 = 0$, da dann $f(0) = g(0) = f(1/2)$. Ansonsten ist entweder $f(0) < g(0)$ und somit $f(1/2) = g(0) > f(0) = g(1/2)$ oder umgekehrt. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus Teil (i).

(c) (i) *Behauptung:* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^4)$ ist gleichmäßig stetig.

Für $z \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq 4$ gilt $|z|^p/(1 + z^4) \leq 1$, denn ist $|z| \leq 1$ so gilt $|z|^p \leq 1 \leq 1 + z^4$, also $|z|^p/(1 + z^4) \leq 1$. Ist andernfalls $|z| > 1$ so gilt $|z|^p \leq z^4$ und damit $|z^p| \leq 1 + z^4$, also gilt ebenfalls $|z|^p/(1 + z^4) \leq 1$.

Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = 1/4\varepsilon$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{1 + x^4} - \frac{1}{1 + y^4}\right| = \left|\frac{x^4 - y^4}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| \\
&= \left|\frac{(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| = \left|\frac{(x^2 + y^2)(x + y)}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| |x - y| \\
&\leq \Bigg(\left|\frac{x^3}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| + \left|\frac{x^2 y}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| \\
&\qquad + \left|\frac{x y^2}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right| + \left|\frac{y^3}{(1 + x^4)(1 + y^4)}\right|\Bigg) |x - y| \\
&\leq 4|x - y| \\
&\leq 4\delta \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

das heißt, f ist gleichmäßig stetig.

(ii) *Behauptung:* Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig.

Zu zeigen ist:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in (0, \infty) : \ |x - y| < \delta \text{ und } |\log(x) - \log(y)| \geq \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$. Wähle $x = \delta$ und $y = \delta/\mathrm{e}$. Dann gilt $|x - y| = |\delta(1 - 1/\mathrm{e})| < \delta$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |\log(x) - \log(y)| &= \left|\log(\delta) - \log\left(\frac{\delta}{\mathrm{e}}\right)\right| \\ &= |\log(\delta) - (\log(\delta) - \underbrace{\log(\mathrm{e})}_{=1})| = 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.

(a) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) A abgeschlossen $\implies$ $f(A)$ abgeschlossen.

(ii) B abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(b) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}$.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ jeweils auf gleichmäßige Stetigkeit:

(i) $D = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$,

(ii) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Aussage ist falsch.

Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $A = \mathbb{R}$ ist A abgeschlossen, aber $f(A) = (0, \infty)$ ist nicht abgeschlossen.

(ii) *Behauptung:* B abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

Es seien B abgeschlossen und (x_n) eine Folge in $f^{-1}(B)$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir müssen zeigen, dass $x \in f^{-1}(B)$ liegt, also $f(x) \in B$.

Da f nach Voraussetzung stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$. Nach Voraussetzung gilt $f(x_n) \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da B abgeschlossen ist, erhalten wir damit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in B$.

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0}(\alpha^x - 1)/x = \log(\alpha)$.

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{\alpha^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\log(\alpha)} - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^k x^k}{k!} - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^k x^{k-1}}{k!}.$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite hat (nachrechnen!) Konvergenzradius ∞, sodass nach Satz 7.4 gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(\alpha)^k}{k!} 0^{k-1} = \log(\alpha).$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to\infty} \log(x)/x^\alpha = 0$.

Es gilt nach Aussage 6.5 im Skript:

$$\frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha y}{e^{\alpha y}} \xrightarrow{y\to\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

Da $y = \log(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, folgt mit der Substitution $y = \log(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0.$$

(c) (i) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [0,\infty)\colon\ |x - y| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Definiere $\delta = \varepsilon^2 > 0$. Es gilt zunächst für alle $x, y \in [0,\infty)$:

$$|x - y| \le |x| + |y| = x + y \le x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2,$$

das heißt, es gilt

$$\sqrt{|x - y|} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}. \tag{1}$$

Es seien nun $x, y \in [0,\infty)$ mit $|x - y| < \delta$. Dann gilt mit (1)

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

(ii) *Behauptung:* Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/\sqrt{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

Zu zeigen ist:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0,\infty)\colon\ |x - y| < \delta \text{ und } \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| \ge \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$. Definiere $y = \delta$ und $x = \min\{\delta/2, (1 + 1/\sqrt{\delta})^{-2}\}$. Dann gilt $0 < x < y = \delta$, also $|x - y| = \delta - x < \delta$. Zudem gilt nach Definition $0 < x \le (1 + 1/\sqrt{y})^{-2}$, also $1/\sqrt{x} \ge 1 + 1/\sqrt{y} > 1/\sqrt{y}$ und damit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 = \varepsilon. \qquad \square$$

Aufgabe 4.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt, das heißt, es existiert ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Gilt diese Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch ein beliebiges Intervall ersetzt wird?

(b) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f.

(iii) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(iv) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

(c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Ist eine Funktion $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag.

(a) Definiere die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Dann ist g stetig als Differenz stetiger Funktionen und es gilt:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \geq a - a = 0, \\ g(b) &= f(b) - b \leq b - b = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\hat{x} \in [a, b]$ mit $0 = g(\hat{x}) = f(\hat{x}) - \hat{x}$, das heißt, $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Diese Aussage ist falsch, falls $[a, b]$ durch ein anderes, zum Beispiel ein offenes Intervall ersetzt wird. Die Funktion $f : (0, 1) \to (0, 1)$, $x \mapsto x^2$ hat keinen Fixpunkt (die Fixpunkte wären auf dem Rand des Intervalls).

(b) (i) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - (1 - x^2)}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

(ii) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$. Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt mit Teil (i)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subseteq [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$. Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

(iii) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \iff\ & y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \iff\ & 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\ \overset{1-xy\geq 0}{\iff}\ & 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \\ \iff\ & x^2(1+y^2) = 2xy \\ \overset{x\neq 0}{\iff}\ & x(1+y^2) = 2y \\ \iff\ & x = \frac{2y}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : [-1,1] \to [-1,1], \quad y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

(iv) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \\ &= \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(1 + x_2^2)(1 + x_1^2)} > 0,$$

denn wegen $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, gilt $x_1 x_2 < 1$.

Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f.

(c) *Behauptung:* Eine Funktion $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle etwa $\delta = 1/2$. Es seien nun $x, y \in \mathbb{N}$ mit $|x - y| < \delta = 1/2$. Dann gilt $x = y$ und somit $|g(x) - g(y)| = 0 < \varepsilon$.

Behauptung: Eine Funktion $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ muss nicht gleichmäßig stetig sein.

Wir betrachten

$$h: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \; h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für die Folgen (x_n) und (y_n) definiert durch $x_n = 1/n$ bzw. $y_n = 1/(n-1)$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt dann $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber $h(x_n) - h(y_n) = n - (n-1) = 1$ konvergiert nicht gegen 0, das heißt, h ist nicht gleichmäßig stetig. $\square$