19. Januar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Karlsruher Institut für Technologie

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: 26. Januar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1+1)+2 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+(nx)^2}$,

(ii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$,

(iii) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{x^3+n^3}, \quad x \in [0,2]$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 2 (K) $(2+2)+3+3 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen beziehungsweise -reihen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

(b) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(c) Es seien $L \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [a,b]$. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass f auch lipschitzstetig ist.

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 (b) verwenden.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0,1)$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie jeweils stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an, für die folgendes gilt:

(i) $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise aber nicht gleichmäßig, und f ist stetig.

(ii) $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise aber nicht gleichmäßig, und f ist unstetig.

(iii) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig wohingegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$ divergiert.

Aufgabe 4.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{x\to b} f(x)$ (in $\mathbb{R}$) existiert.

(b) Es sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(i) $f_n(a) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Zeigen Sie, dass (f_n) dann gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0 konvergiert.

(c) Es seien $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen für $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$ konvergiere. Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Beachten Sie, dass es dafür, dass die rechte Seite der Implikation gilt, nach Aufgabe 3 (b) (iii) nicht notwendig ist, dass die linke Seite gilt, das heißt, die Bedingung ist nicht notwendig.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 19. Januar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.