Karlsruher Institut für Technologie

26. Januar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (K) $(1 + 1 + 1) + 2 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x^2}{1 + (nx)^2}$,

(ii) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$,

(iii) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$.

(b) Untersuchen Sie die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{x^3 + n^3}, \quad x \in [0, 2]$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{1 + n^2x^2} < \frac{\frac{1}{n^2} + x^2}{1 + n^2x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(ii) *Behauptung:* Die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Zunächst gilt $f_n(0) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \in (0, 1]$ gilt $f_n(x) = \sqrt[n]{n}^{\,2} \sqrt[n]{x} \to 1^2 \cdot 1 = 1$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen f. Da alle f_n stetig sind (als Komposition stetiger Funktionen), aber f in 0 unstetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig gewesen sein.

(iii) *Behauptung:* Die Funktion konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Zuerst gilt für $x = 0$: $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$, und für $x \in (0, \infty)$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx\mathrm{e}^{-nx} = \lim_{y\to\infty} y\mathrm{e}^{-y} = 0$. Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion. Um einzusehen, dass diese Konvergenz nicht gleichmäßig ist, betrachten wir $x = 1/n$. Es gilt:

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0\right| = \mathrm{e}^{-1}.$$

Da die rechte Seite nicht gegen 0 läuft für $n \to \infty$, ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

(b) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^2/(x^3 + n^3)$ konvergiert gleichmäßig in $x \in [0, 2]$.

Für $x \in [0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{nx^2}{x^3 + n^3}\right| = \frac{nx^2}{x^3 + n^3} \le \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2} =: c_n.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe nach dem Kriterium von Weierstraß, Satz 8.1 (b), gleichmäßig. □

Aufgabe 2 (K) $(2 + 2) + 3 + 3 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen beziehungsweise -reihen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1 - x)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, welche punktweise auf D gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf D genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

(c) Es seien $L \ge 0$ und $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit $|f_n(x) - f_n(y)| \le L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass f auch lipschitzstetig ist.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktion konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Da $(1-\varepsilon)^n$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $(1-\varepsilon)^n < \varepsilon$ gilt für $n \geq n_0$.

Seien nun $n \geq n_0$ und $x \in [0,1]$ beliebig. Falls $x \leq 1-\varepsilon$ ist, erhalten wir

$$|f_n(x) - 0| = x^n(1-x) \leq (1-\varepsilon)^n(1-x) < \varepsilon.$$

Für $x > 1-\varepsilon$ finden wir

$$|f_n(x) - 0| = x^n(1-x) \leq 1-x < \varepsilon.$$

In jedem Fall gilt $|f_n(x)-0| < \varepsilon$. Das zeigt, dass f_n gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1+x^2)^n$ konvergiert punktweise für $x \in \mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$.

Sei zuerst $x = 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Für $x \neq 0$ nutzen wir die geometrische Reihe und erhalten so:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1+x^2.$$

Also konvergiert die Reihe punktweise gegen die Summenfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x =, 0 \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Wegen $f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$ ist f unstetig. Andererseits sind alle Summanden $x^2/((1+x^2)^n)$ stetig als Komposition stetiger Funktionen, sodass nach Satz 8.3 (b) die Reihe nicht gleichmäßig konvergiert.

(b) $\Longrightarrow$ Es sei (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Folglich gilt dies auch für $x = x_n$.

$\Longleftarrow$ Angenommen (f_n) ist nicht gleichmäßig konvergent gegen f. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ und ein $x(n) \in D$ gibt mit

$$|f_n(x(n)) - f(x(n))| \geq \varepsilon_0.$$

Definiere die Folge (x_n) durch $x_n = x(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann konvergiert $f_n(x_n) - f(x_n)$ nicht gegen 0.

(c) Zuerst zeigen wir, dass f auch lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante L. Um das einzusehen, seien $x, y \in [a, b]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(y)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} L|x - y| = L|x - y|.\end{aligned}$$

Option 1: Direkter Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $K \in \mathbb{N}$ (Wert von K wird später festgesetzt). Wir betrachten die $K+1$ äquidistant verteilten Punkte $x_k = a + k(b-a)/K$ für $k \in \{0, 1, \dots, K\}$. Für $k \in \{0, \dots, K\}$ konvergiert $f_n(x_k)$ gegen $f(x_k)$ für $n \to \infty$, sodass ein $N_k \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ für $n \geq N_k$. Wir wählen $N = \max\{N_0, \dots, N_K\}$. Wir müssen zeigen, dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a, b]$ und $n \geq N$ gilt. Dazu sei $x \in [a, b]$ beliebig. Dann existiert ein $k \in \{0, \dots, K-1\}$ so, dass x in $[x_k, x_{k+1}]$ liegt. Insbesondere gilt $|x - x_k| \leq |x_{k+1} - x_k| = (b-a)/K$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &< L|x - x_k| + \frac{1}{2}\varepsilon + L|x_k - x| \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + 2\frac{(b-a)L}{K}.\end{aligned}$$

Wählen wir nun $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2(b-a)L/K \leq \varepsilon/2$ gilt, so folgt die gewünschte Aussage.

Option 2: Widerspruchsbeweis: Wir nehmen zum Widerspruch an, f_n konvergiere nicht gleichmäßig. Dann existiert so ein $\varepsilon > 0$, dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ein (von n abhängiges) $x \in [a, b]$ existiert, sodass $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ gilt. Wir fassen diese n zu einer wachsenden Folge (n_k) zusammen und schreiben x_k für das zu n_k gehörige x, das heißt, es gilt $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$ für $k \in \mathbb{N}$. Nun besitzt x_k nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine gegen ein $x_\star \in [a, b]$ konvergente Teilfolge x_{k_j}. Es folgt für $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \left|f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})\right| \\ &= \left|f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f_{n_{k_j}}(x_\star) + f_{n_{k_j}}(x_\star) - f(x_\star) + f(x_\star) - f(x_{k_j})\right| \\ &\leq \left|f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f_{n_{k_j}}(x_\star)\right| + \left|f_{n_{k_j}}(x_\star) - f(x_\star)\right| + \left|f(x_\star) - f(x_{k_j})\right| \\ &\leq L\left|x_{x_{k_j}} - x_\star\right| + \left|f_{n_{k_j}}(x_\star) - f(x_\star)\right| + L\left|x_\star - x_{k_j}\right|.\end{aligned}$$

Für $j \to \infty$ erhalten wir:

$$\varepsilon \leq \lim_{j\to\infty}\left(L\left|x_{x_{k_j}} - x_\star\right| + \left|f_{n_{k_j}}(x_\star) - f(x_\star)\right| + L\left|x_\star - x_{k_j}\right|\right)$$

$$= L\Big|\lim_{j\to\infty} x_{x_{k_j}} - x_\star\Big| + \Big|\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x_\star) - f(x_\star)\Big| + L\Big|x_\star - \lim_{j\to\infty} x_{k_j}\Big| = 0,$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 (b) verwenden.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0,1)$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie jeweils stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an, für die folgendes gilt:

(i) $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise aber nicht gleichmäßig, und f ist stetig.

(ii) $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise aber nicht gleichmäßig, und f ist unstetig.

(iii) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig wohingegen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ divergiert.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

Wir zeigen gleichmäßige Konvergenz, woraus sich dann auch die punktweise Konvergenz ergibt. Für alle $x \in [0,\infty)$ gilt

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq x,$$

das heißt, $x/\mathrm{e}^x \leq 1$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}} \leq \frac{1}{n}.$$

Wegen $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

Es gilt $f_n(0) = 0 \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x \in (0,1]$ gilt $(1-x) \in [0,1)$ und damit folgt

$$\sqrt[n]{|nx(1-x)^n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{x}(1-x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 1 \cdot (1-x) = 1 - x < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(nx(1-x)^n)$ und somit ist die Folge $(nx(1-x)^n)$ eine Nullfolge. Somit ist die punktweise Konvergenz von (f_n) gegen die Nullfunktion gezeigt.

Weiter gilt für die Folge $(1/n)$ in $[0,1]$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

für $n \to \infty$. Nach Aufgabe 2 (b) ist die Konvergenz daher nicht gleichmäßig.

(iii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(nx - n^2)$ konvergiert auf $(0,1)$ punktweise und gleichmäßig.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in (0,1)$ gilt

$$\left|\frac{1}{nx - n^2}\right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-x} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{(n-1)^2} = a_n.$$

Setze $a_1 = 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt $|1/(nx-n^2)| \leq a_n$ für alle $n \geq 2$ und alle $x \in (0,1)$. Nach dem Kriterium von Weierstraß konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(nx - n^2)$ auf $(0,1)$ gleichmäßig, und daher insbesondere auch punktweise.

(iv) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(x)/(1+x^4)^n$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin(x)\left(1 + \frac{1}{x^4}\right), & x \neq 0. \end{cases}$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $x = 0$ folgt wegen $\sin(0) = 0$ direkt $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(x)/(1+x^4)^n = 0 = f(0)$.

Für $x \neq 0$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(1/(1+x^4))^n$ konvergent und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^n} &= \sin(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)^n = \sin(x) \cdot \frac{1}{1 - 1/(1+x^4)} \\ &= \sin(x) \cdot \frac{1+x^4}{1+x^4-1} = \sin(x)\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) = f(x).\end{aligned}$$

Somit konvergiert (f_n) punktweise gegen f.

Für alle $x \neq 0$ gilt $f(x) = \sin(x) + \sin(x)/x \cdot 1/x^3$. Nach der Vorlesung gilt zudem $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, $1/x^3$ divergiert aber für $x \to 0$. Somit existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ nicht, insbesondere ist f in 0 nicht stetig. Damit kann die Konvergenz der stetigen Funktionen $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \sin(x)/(1+x^4)^n$ $(k \in \mathbb{N})$ gegen f nicht gleichmäßig sein (vergleiche Skript, Seite 79, Satz 8.3 b).

(b) (i) Wir verwenden beispielsweise Teilaufgabe (a) (ii).

(ii) Wir verwenden beispielsweise Beispiel (a) vor Satz 8.1.

(iii) Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 2^{-n}, \\ \frac{2^n}{n}(x - 2^{-n}), & 2^{-n} \le x < \frac{3}{2} \cdot 2^{-n}, \\ \frac{2^n}{n}(2^{1-n} - x), & \frac{3}{2} \cdot 2^{-n} \le x < 2^{1-n}, \\ 0, & 2^{1-n} \le x. \end{cases}$$

Behauptung: Alle Funktionen f_n sind stetig, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig, und $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \infty$.

Zunächst ist f_n auf $[0, 2^{-n})$, $(2^{-n}, 3/2 \cdot 2^{-n})$, $(3/2 \cdot 2^{-n}, 2^{1-n})$ sowie auf $(2^{1-n}, 0]$ stetig als Komposition stetiger Funktionen (man beachte dabei die Beobachtung in Übung 08). Weiter ist f_n auch in 2^{-n}, $3/2 \cdot 2^{-n}$ sowie 2^{1-n} stetig, da die einseitigen Grenzwerte existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen (nachrechnen!). Nun gilt

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[2^{-n},2^{1-n}]} |f(x)| = \max_{x\in[2^{-n},2^{1-n}]} f(x) = f\Big(\frac{3}{2} \cdot 2^{-n}\Big) = \frac{1}{2n},$$

wobei wir verwendet haben, dass f_n nichtnegativ ist, auf $[2^{-n}, 3/2 \cdot 2^{-n}]$ wächst und auf $[3/2 \cdot 2^{-n}, 2^{1-n}]$ fällt.

Nun gilt $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n) = \infty$ (harmonische Reihe). Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert. Sei $x \in (0,1)$. Dann existiert ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $x \in [2^{-n_x}, 2^{1-n_x})$. Es folgt

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n_x}(x), & n = n_x, \\ 0, & n \ne n_x. \end{cases}$$

Offensichtlich gelten

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \begin{cases} f_{n_x}(x), & n_x \le N, \\ 0, & n_x > N \end{cases}$$

für $N \in \mathbb{N}$, $x \in (0,1)$ sowie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_{n_x}(x)$. Die (punktweise) Grenzfunktion der Reihe ist also gegeben durch

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f_{n_x}(x), & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wie wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 1/(2\varepsilon)$. Dann gilt für $n \geq n_0$ und $x \in (0,1)$:

$$|f(x) - s_n(x)| = \begin{cases} f_{n_x}(x) \leq \dfrac{1}{2n_x} < \dfrac{1}{2n_0} \leq \varepsilon, & n_x > n, \\ 0 < \varepsilon, & n_x \leq n \end{cases}$$

sowie $|f(x) - s_n(x)| = 0 < \varepsilon$ für $x \in \{0,1\}$. Also gilt $|f(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \geq n_0$. Das zeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert. □

Aufgabe 4.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{x \to b} f(x)$ (in $\mathbb{R}$) existiert.

(b) Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(i) $f_n(a) \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$),

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Zeigen Sie, dass (f_n) dann gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0 konvergiert.

(c) Es seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen für $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ konvergiere. Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Beachten Sie, dass es dafür, dass die rechte Seite der Implikation gilt, nach Aufgabe 3 (b) (iii) nicht notwendig ist, dass die linke Seite gilt, das heißt, die Bedingung ist nicht notwendig.

Lösungsvorschlag.

(a) $\Longrightarrow$ Sei f gleichmäßig stetig.

Wir zeigen zuerst, dass f beschränkt ist. Dazu gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < 1$ für $x, y \in [a,b)$ mit $|x - y| < \delta$. Da $[a, \max\{a, b-\delta\}]$ kompakt ist, ist f auf $[a, \max\{a, b-\delta\}]$ beschränkt mit Schranke C. Dann sieht man leicht, dass f beschränkt ist mit Schranke $C+1$.

Nach Vorlesung, Satz 6.2 (b) genügt es zu zeigen, dass für jede Folge (x_n) mit $x_n \to b$ ($n \to \infty$) die Bildfolge $f(x_n)$ konvergiert. Sei (x_n) eine solche Folge. Zum Widerspruch nehmen wir an, $(f(x_n))$ konvergiert nicht. Dann besitzt $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ (mindestens) zwei Häufungspunkte $\alpha \neq \beta$. Wir wählen Teilfolgen mit

$$f(x_{n_k^\alpha}) \to \alpha \qquad \text{sowie} \qquad f(x_{n_k^\beta}) \to \beta$$

für $k \to \infty$. Weiter gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für $x, y \in [a,b)$ mit $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < |\alpha - \beta|/2$ gilt. Wegen $x_{n_k^\alpha} \to b, x_{n_k^\beta} \to b$ für $k \to \infty$ gilt $|x_{n_k^\alpha} - x_{n_k^\beta}| < \delta$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Aus

$$|\alpha - \beta| = \lim_{k\to\infty} \left| f(x_{n_k^\alpha}) - f(x_{n_k^\beta}) \right| \leq \frac{1}{2} |\alpha - \beta|$$

erhalten wir einen Widerspruch.

Alternativ kann man die Aussage der Richtung » $\Longrightarrow$ « direkt aus Satz 6.2 (c) folgern.

$\Longleftarrow$ Es existiere $\lim_{x\to b} f(x)$. Wir betrachten die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x < b, \\ \lim\limits_{x\to b} f(x), & x = b. \end{cases}$$

Dann ist g stetig in b, da $\lim_{x\to b} g(x) = g(b)$ gilt. Weiter ist g auf $[a,b)$ stetig, da f stetig ist. Also ist g nach dem Satz von Heine (Satz 7.16) stetig. Da $[a,b]$ kompakt ist, ist g gleichmäßig stetig. Damit ist aber auch $f = g|_{[a,b)}$ gleichmäßig stetig.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie

$$0 \le f_n(a) \le f_n(x) \le f_n(b) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Eigenschaft (b) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $0 \le f_n(b) < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Wegen der Monotonie erhalten wir

$$\forall n \ge n_0\ \forall x \in [a,b]\colon\ 0 \le f_n(x) \le f_n(b) < \varepsilon.$$

Somit gilt insgesamt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in [a,b]\colon\ |f_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

also konvergiert (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $c_n = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{n=1}^\infty c_n$. Nun gilt für $x \in [0,1]$:

$$\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^\infty c_n < \infty,$$

sodass $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ für dieses feste x absolut konvergiert und insbesondere konvergiert. Für die Summenfunktion schreiben wir

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x), \qquad x \in [0,1].$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Konvergenz gleichmäßig ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{n=N}^\infty c_n < \varepsilon$ gilt für $N > N_0$. Für $x \in [0,1]$ und $N \ge N_0$ erhalten wir:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) \right| \le \sum_{n=N+1}^\infty |f_n(x)| \le \sum_{n=N+1}^\infty c_n < \varepsilon.$$

Das zeigt, dass $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert.

Alternativ kann man diese Aussage auch mit dem Satz von Weierstraß, Satz 8.1 (b), beweisen; an dieser Stelle sei angemerkt, dass man durch eine leichte Modifikation des obigen Argumentes einen Beweis des Kriteriums von Weierstraß erhält. □