Karlsruher Institut für Technologie

26. Januar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 12

Abgabe: 02. Februar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1 + 1 + 1) + 2 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie jeweils alle Punkte x, in denen die Funktion f differenzierbar ist und berechnen Sie dort den Wert der Ableitung.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{1/(1+x^2)}$

(ii) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{xe^{2^x}}{\log(1+x)}$.

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3 + x + \frac{1}{2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1+x), & 0 \leq x < 1, \\ 1 + \log(\sqrt{x}), & 1 \leq x. \end{cases}$

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon [-1,9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^5, & x \in [-1,1), \\ 2 - (x-2)^2, & x \in [1,3), \\ 3x - 8, & x \in [3,4], \\ \dfrac{12}{x}, & x \in (4,9]. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (K) $2 + 2 + 3 + 3 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \leq (y - x)(1 + \log y).$$

(b) Es seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^\alpha$ gegeben. Dabei ist $0^\alpha = 0$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist in } 0 \text{ differenzierbar} \iff \alpha > 1.$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(d) Es sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), x \mapsto x^3 \log(1+x^2)$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und dass die Inverse f^{-1} differenzierbar ist. Bestimmen Sie zudem $(f^{-1})'(\log(2))$.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass die im Folgenden definierten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$:

(i) $f(x) = (x^4 + 1)\mathrm{e}^{x^3}$,

(ii) $f(x) = |x^2 - 4|^3$,

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 (b) verwenden.

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Produkt $g\cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (g\cdot f)(x) = g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) Es sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = (x^{1/3} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, das heißt, $(f^{-1})'(544)$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.

Aufgabe 4.

(a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(i) Ist f in x_0 differenzierbar, so gelten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$$

sowie

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{2h} = 0.$$

(ii) Existieren umgekehrt die Grenzwerte

$$a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

und

$$b = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{2h},$$

und ist $b = 0$, so ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = a$.

(iii) Existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0-h))/(2h)$, so ist f im Allgemeinen nicht in x_0 differenzierbar.

(b) (i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $1 < x < y$. Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

(1) $e^{y^2} - e^{x^2} \leq e^{y^2}(y - x)(y + x)$,

(2) $y^2 \log(y) - x^2 \log(x) \leq y(1 + 2\log(y))(y - x)$.

(ii) Bestimmen Sie $\min\{x^x : x > 0\}$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 26. Januar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.