Karlsruher Institut für Technologie

02. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

# Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
## Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 12

**Aufgabe 1 (K)** $(1 + 1 + 1) + 2 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet***.**

(a) Bestimmen Sie jeweils alle Punkte $x$, in denen die Funktion $f$ differenzierbar ist und berechnen Sie dort den Wert der Ableitung.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{1/(1+x^2)}$

(ii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{2^x}}{\log(1 + x)}$.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3 + x + \frac{1}{2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 + x), & 0 \le x < 1, \\ 1 + \log(\sqrt{x}), & 1 \le x. \end{cases}$

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f : [-1, 9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^5, & x \in [-1, 1), \\ 2 - (x - 2)^2, & x \in [1, 3), \\ 3x - 8, & x \in [3, 4], \\ \dfrac{12}{x}, & x \in (4, 9]. \end{cases}$$

*Lösungsvorschlag.*

(a) (i) *Behauptung:* $f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{1/(1+x^2)} \frac{2x}{(1 + x^2)^2}.$$

$f$ ist nach der Ketten- und der Quotientenregel differenzierbar (beachte $1+x^2 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$) und es gilt

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1/(1+x^2)} \frac{-1}{(1 + x^2)^2} 2x = -\mathrm{e}^{1/(1+x^2)} \frac{2x}{(1 + x^2)^2}.$$

(ii) *Behauptung:* Die Funktion $f$ ist auf ganz $(0,\infty)$ differenzierbar. Die Ableitung in $x \in (0,\infty)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{e^{2^x}}{\log(1+x)}\left(1 + x2^x\log(2) - \frac{x}{(1+x)\log(1+x)}\right).$$

Es gilt

$$f(x) = \frac{x\exp(e^{x\log(2)})}{\log(1+x)}$$

für $x \in (0,\infty)$. Diese Funktion ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. Mithilfe der Ketten-, der Produkt und der Quotientenregel erhalten wir für alle $x \in (0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\exp(e^{x\log(2)}) + x\exp(e^{x\log(2)})e^{x\log 2}\log(2)}{\log(1+x)} - \frac{x\exp(e^{x\log(2)})}{\log(1+x)^2}\frac{1}{1+x} \\
&= \frac{e^{2^x} + xe^{2^x}2^x\log(2)}{\log(1+x)} - \frac{xe^{2^x}}{\log(1+x)^2(1+x)} \\
&= \frac{e^{2^x}}{\log(1+x)}\left(1 + x2^x\log(2) - \frac{x}{(1+x)\log(1+x)}\right).
\end{aligned}$$

(iii) *Behauptung:* $f$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \in (-\infty,0) \\ \frac{1}{2}, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{2x}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

Auf der offenen Menge $(-\infty,0)$ ist $f(x) = x^3 + x + 1/2$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 3x^2+1$.

Auf der offenen Menge $(0,1)$ ist $f(x) = (1+x)/2$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 1/2$.

Auf der offenen Menge $(1,\infty)$ ist $f(x) = 1 + \log(\sqrt{x})$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 1/(2x)$.

Wir definieren die differenzierbare Funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(\sqrt{x})$ mit Ableitung $g'(x) = 1/(2x)$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{\log(\sqrt{1+h}) - \log(\sqrt{1})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = g'(1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{1/(2h)}{h} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist $f$ differenzierbar in $x = 1$ mit Ableitung $f'(1) = 1/2$.

Wegen

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(1+h)/2 - 1/2}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1/(2h)}{h} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^3 + h + 1/2 - 1/2}{h} = \lim_{h\to 0-} h^2 + 1 = 1$$

ist $f$ in 0 nicht differenzierbar.

(b) *Behauptung:* $f$ besitzt für $x_0 \in \{-1, 3, 9\}$ ein lokales Minimum und für $x_0 \in \{2, 4\}$ ein lokales Maximum, und keine weiteren lokalen Extrema.

Es gilt $f(-1) = -1$ und $f'(x) = 5x^4$ für $x \in (-1, 1)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ sowie $f'(0) = 0$ und folglich ist $f$ auf $[-1, 1)\setminus\{0\}$ streng monoton wachsend. Also ist $f(-1) < f(x)$ für $x \in (-1, 1)$ und damit hat $f$ in $x_0 = -1$ ein lokales Minimum.

Es gilt $f(2) = 2$ und $f'(x) = 4 - 2x$ auf $(1, 3)$. Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (1, 2)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (2, 3)$. Also ist $f$ auf $(1, 2)$ streng monoton wachsend und auf $(2, 3)$ streng monoton fallend. Somit gilt $f(x) \le f(2)$ für $x \in (1, 3)$ und folglich hat $f$ in 2 ein lokales Maximum.

Es gilt $f(3) = 1$ und $f(x) = 3x - 8 \ge 1$ für $x \in [3, 4)$. Außerdem gilt $f(x) > 1$ auf $(1, 3)$, denn für $x \in (1, 3)$ ist $(x-2)^2 < 1$. Also hat $f$ in $x_0 = 3$ ein lokales Minimum. Ferner gilt $f'(x) = 3$ für $x \in (3, 4)$ und daher ist $f$ dort streng monoton wachsend.

Es gilt $f(4) = 4$ und $f(x) < 4$ für $x \in (3, 4)$. Außerdem gilt $f(x) < 3$ und somit insbesondere $f(x) < 4$ für alle $x \in (4, 9)$. Also hat $f$ in 4 ein lokales Maximum. Ferner ist $f'(x) = -12/x^2 < 0$ für $x \in (4, 9)$ und damit ist $f$ dort streng monoton fallend.

Es gilt $f(9) = 4/3$ und $f(x) > 4/3$ für $x \in (4, 9)$. Somit hat $f$ in 9 ein lokales Minimum.

Wir müssen nun noch ausschließen, dass $f$ weitere lokale Extrema besitzt: auf den Intervallen $(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)$ und $(4, 9)$ ist, wie wir oben gesehen haben, $f$ jeweils entweder nur streng monoton fallend oder nur streng monoton wachsend. Dort kann also kein lokales Extremum von $f$ existieren. Es sei $\delta \in (0, 1)$. Dann gilt für alle $x < 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 < 0$ und für alle $x > 0$ mit $|x| < \delta$, dass $f(x) = x^5 > 0$. Also hat $f$ in 0 kein lokales Extremum. Für alle $x$ mit $|x - 1| < \delta$ und $x < 1$ gilt $f(x) = x^5 < 1$ und für alle $x$ mit $|x - 1| < \delta$ und $x > 1$ gilt $f(x) = 2 - (x-2)^2 > 1$. Somit hat $f$ in 1 ebenfalls kein lokales Extremum. □

**Aufgabe 2 (K)** $2 + 2 + 3 + 3 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Zeigen Sie, dass für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$y \log y - x \log x \le (y - x)(1 + \log y).$$

(b) Es seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^\alpha$ gegeben. Dabei ist $0^\alpha = 0$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist in } 0 \text{ differenzierbar} \quad \iff \quad \alpha > 1.$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese $x$ die Ableitung $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(d) Es sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), x \mapsto x^3 \log(1+x^2)$. Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist und dass die Inverse $f^{-1}$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie zudem $(f^{-1})'(\log(2))$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) Definiere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) = t\log t$. Mit der Produktregel erhält man, dass $f$ differenzierbar mit $f'(t) = \log t + 1$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi).$$

Da $f'$ monoton wächst, gilt $f'(\xi) \leq f'(y)$ für alle $\xi \in (x,y)$. Zusammen mit $y - x > 0$ folgt

$$y\log y - x\log x = f(y) - f(x) \leq (y-x) \cdot f'(y) = (y-x)(1+\log y).$$

(b) $\Longleftarrow$ Sei $\alpha > 1$. Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}|h|^{\alpha-1} = 0.$$

Also ist $f$ in 0 differenzierbar.

$\Longrightarrow$ Sei $0 < \alpha \leq 1$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\alpha-1}\begin{cases} = 1, & \alpha = 1 \\ \text{existiert nicht}, & \alpha < 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} -|h|^{\alpha-1}\begin{cases} = -1, & \alpha = 1 \\ \text{existiert nicht}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Also ist $f$ nicht differenzierbar in 0.

(c) *Behauptung:* $f$ ist genau dann differenzierbar, wenn $x \in \{0,1\}$. In diesem Fall gilt $f'(x) = 0$.

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = x^2(x-1)^2$. Es sei zunächst $x \in \{0,1\}$. Dann gilt $f(x) = 0$, also

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)}{h}$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Folglich gilt

$$\left|\frac{f(x+h)}{h}\right| \leq \left|\frac{(x+h)^2(x+h-1)^2}{h}\right| = \left|(x+h)(x-1+h) \cdot \frac{(x+h)(x-1+h)}{h}\right|$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit gelten

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leq \left|h(h-1) \cdot \frac{h(h-1)}{h}\right| = |h|(h-1)^2 \xrightarrow{h\to 0} 0$$

und

$$\left|\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right| \leq \left|(1+h)h \cdot \frac{(1+h)h}{h}\right| = |h|(1+h)^2 \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

das heißt, $f$ ist in diesen $x$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

Es sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Wir zeigen, dass $f$ in $x$ nicht stetig ist, somit kann $f$ dort auch nicht differenzierbar sein.

**Fall 1:** Es sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$. Dann gilt $f(x) = 0$. Wähle eine Folge $(x_n)$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n^2(x_n-1)^2 \xrightarrow{n\to\infty} x^2(x-1)^2 \neq 0 = f(x),$$

also ist $f$ nicht stetig in $x$.

**Fall 2:** Es sei $x \notin \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = x^2(x-1)^2 \neq 0$. Wähle eine Folge $(x_n)$ in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq f(x)$, also ist $f$ nicht stetig in $x$.

(d) *Behauptung:* $f$ ist bijektiv, $f^{-1}$ ist differenzierbar und es gilt $(f^{-1})'(\log(2)) = 1/(1 + 3\log(2))$.

Nach der Produkt- und Kettenregel ist $f$ auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{x^3}{1+x^2}2x + 3x^2\log(1+x^2).$$

Wegen $\log(1+x^2) > 0$ für $x \in (0,\infty)$ gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Nach Satz 9.10 ist $f$ also streng monoton wachsend und somit injektiv. Ferner ist $f$ stetig auf $(0,\infty)$ und es gilt $f(x) \to 0$ $(x \to 0)$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt folglich $f((0,\infty)) = (0,\infty)$, das heißt, $f$ ist auch surjektiv. Insgesamt ist $f$ also bijektiv. Nach Satz 9.3 ist $f^{-1}$ in jedem Punkt $y_0 \in (0,\infty)$ invertierbar. Wegen $f(1) = \log(2)$ folgt mit diesem Satz weiter:

$$(f^{-1})'(\log(2)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3\log(2)}. \qquad \square$$

**Aufgabe 3.**

(a) Zeigen Sie, dass die im Folgenden definierten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$:

(i) $f(x) = (x^4 + 1)e^{x^3}$,

(ii) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|^3$,

*Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 (b) verwenden.*

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^\alpha e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Die Funktion $f$ sei stetig in 0 und $g$ sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass das Produkt $g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (g \cdot f)(x) = g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definiert durch $f(x) = (x^{1/3} + x)\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in 544, das heißt, $(f^{-1})'(544)$.

*Hinweis: Verwenden Sie, dass $f(64) = 544$.*

*Lösungsvorschlag.*

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktion $f$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = x^2(3 + 4x + 3x^4)e^{x^3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion ist als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3 e^{x^3} + (x^4 + 1)e^{x^3} 3x^2 = x^2(3 + 4x + 3x^4)e^{x^3}.$$

(ii) *Behauptung:* Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 6x(x^2 - 4)^2, & x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2], \\ -6x(x^2 - 4)^2, & x \in [-2, 2]. \end{cases}$$

Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|^3$. Laut Aufgabe 2 (b) ist $g$ differenzierbar und für die Ableitung gilt $g'(x) = 3x|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit ist $f$ als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Kettenregel folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3(x^2 - 4)|x^2 - 4| \cdot 2x = 6x(x^2 - 4)|x^2 - 4|.$$

Für $x \in [-2, 2]$ ergibt sich $f'(x) = -6x(x^2 - 4)^2$, für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ erhält man hingegen $f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$.

(iii) *Behauptung:* Die Funktion $f$ ist differenzierbar und Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} (\alpha x + 1)x^{\alpha - 2} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

In $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f$ differenzierbar, da $f$ auf $(-\infty, 0)$ identisch 0 ist und auf $(0, \infty)$ eine Verkettung differenzierbarer Funktionen ist. Es gilt also $f'(x) = 0$ für $x < 0$ und für $x > 0$ erhält man

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-1/x} + x^\alpha \mathrm{e}^{-1/x} \frac{1}{x^2} = (\alpha x + 1) x^{\alpha-2} \mathrm{e}^{-1/x}.$$

Damit $f$ in 0 differenzierbar ist, muss der Grenzwert $\lim_{x \to 0} (f(x) - f(0))/(x - 0)$ existieren. Es gilt $\lim_{x \to 0-} (f(x) - f(0))/(x - 0) = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-1/x}.$$

Mit der Substitution $y = 1/x$ erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{y \to \infty} y^{1-\alpha} \mathrm{e}^{-y}.$$

Nun gilt $\lim_{y \to \infty} y^{1-\alpha} \mathrm{e}^{-y} = 0$.

Für $\alpha \geq 2$ folgt dies wegen $0 \leq y^{1-\alpha} \mathrm{e}^{-y} \leq \mathrm{e}^{-y}$ für $y \geq 1$ und dem Sandwichkriterium, während wir für $\alpha < 2$ die Abschätzung $0 \leq y^{1-\alpha} \mathrm{e}^{-y} \leq y^k \mathrm{e}^{-y}$ (für $y \geq 1$) mit $k = [1 - \alpha]$ (hier ist $[\bullet]$ die Gaußklammer) und das Sandwichkriterium verwenden, wobei die Konvergenz $\lim_{y \to \infty} y^k \mathrm{e}^{-y} = 0$ des letzten Terms nach Vorlesung, Aussage 6.5, gilt.

(b) *Behauptung:* Das Produkt $\varphi = f \cdot g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$ ist in 0 differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(0) = (f \cdot g)'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

Für alle $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\varphi(0 + h) - \varphi(0)}{h} = \frac{f(h) g(h) - f(0) g(0)}{h} = \frac{f(h) g(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Da $f$ in 0 stetig ist, gilt $f(h) \to f(0)$ für $h \to 0$. Da $g$ in 0 differenzierbar ist, gilt $g(h) - g(0)/h \to g'(0)$ für $h \to 0$. Insgesamt gilt also

$$\frac{\varphi(0 + h) - \varphi(0)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(0) \cdot g'(0),$$

also ist $\varphi$ nach Definition in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

(c) *Behauptung:* Die Funktion $f$ ist bijektiv und $(f^{-1})'(544) = 12/149$.

Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist $f$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar und es gilt für $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \left( \frac{1}{3} x^{-2/3} + 1 \right) \sqrt{x} + \left( x^{1/3} + x \right) \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Also gilt $f' > 0$ auf $(0, \infty)$ und somit ist $f$ auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend nach Satz 9.10. Da $f$ auf $[0, \infty)$ stetig ist, ist $f$ damit auf $[0, \infty)$ injektiv. Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $f([0, \infty)) = [0, \infty)$, das heißt, $f$ ist surjektiv. Insgesamt ist $f$ also bijektiv.

Da $f(64) = \left(64^{1/3} + 64\right)\sqrt{64} = (4 + 64)8 = 544$ liefert der Satz 9.3 über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(544) &= \frac{1}{f'(64)} = \frac{1}{(1/3 \cdot 64^{-2/3} + 1)\sqrt{64} + (64^{1/3} + 64)1/(2\sqrt{64})} \\
&= \frac{1}{(1/3 \cdot 1/16 + 1)8 + (4 + 64) \cdot 1/(2 \cdot 8)} = \frac{1}{1/6 + 8 + 1/4 + 4} \\
&= \frac{1}{(2 + 3 + 144)/12} = \frac{12}{149}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4.**

(a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(i) Ist $f$ in $x_0$ differenzierbar, so gelten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

sowie

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{2h} = 0.$$

(ii) Existieren umgekehrt die Grenzwerte

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

und

$$b = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{2h},$$

und ist $b = 0$, so ist $f$ in $x_0$ differenzierbar und $f'(x_0) = a$.

(iii) Existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0}(f(x_0+h) - f(x_0-h))/(2h)$, so ist $f$ im Allgemeinen nicht in $x_0$ differenzierbar.

(b) (i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $1 < x < y$. Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

(1) $\mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{x^2} \leq \mathrm{e}^{y^2}(y - x)(y + x)$,

(2) $y^2 \log(y) - x^2 \log(x) \leq y(1 + 2\log(y))(y - x)$.

(ii) Bestimmen Sie $\min\{x^x : x > 0\}$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) (i) Für $h \neq 0$ gelten

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 + (-h)) - f(x_0)}{-h}\right)
\end{aligned}$$

$$\to \frac{1}{2}(f'(x_0) + f'(x_0)) = f'(x_0)$$

für $h \to 0$ und

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{2h} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+(-h)) - f(x_0)}{-h}\right) \\
&\quad \to \frac{1}{2}(f'(x_0) - f'(x_0)) = 0, \qquad h \to 0.
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt für $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{2f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{2h} \\
&\to \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + 0, \qquad h \to 0.
\end{aligned}$$

Also existiert $f'(x_0)$ und es gilt $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0))/2h$.

(iii) *Behauptung:* Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ und $x_0 = 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0-h))/2h$, aber $f$ ist in $x_0$ nicht differenzierbar.

Nach Vorlesung oder Übungsaufgabe 2 (b) ist die Betragsfunktion in 0 nicht differenzierbar. Weiter gilt für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{|h| - |h|}{2h} = 0 \to 0, \quad h \to 0.$$

(b) (i) (1) Nach dem Mittelwertsatz angewandt auf die Exponentialfunktion existiert ein $\xi \in (x^2, y^2)$ mit

$$\frac{e^{y^2} - e^{x^2}}{y^2 - x^2} = e^{\xi}.$$

Also ist

$$e^{y^2} - e^{x^2} = e^{\xi}(y+x)(y-x) \leq e^{y^2}(y+x)(y-x).$$

(2) Die Abbildung $(0,\infty) \ni z \mapsto z^2 \log(z) \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung an Stelle $z$ gegeben durch $2z\log(z) + z$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{y^2\log(y) - x^2\log(x)}{y - x} = 2\xi\log(\xi) + \xi.$$

Also ist

$$y^2\log(y) - x^2\log(x) = \xi(1 + 2\log(\xi))(y-x) \leq y(1 + 2\log(y))(y-x).$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\min\{x^x : x > 0\} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$.

Wir definieren $f: (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$. Dann gilt $f(x) = \mathrm{e}^{x\log(x)}$, also ist $f$ nach der Ketten- und Produktregel differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot \left(x\frac{1}{x} + \log(x)\right) = \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot (1 + \log(x)) \quad (x \in (0,\infty)).$$

Weiter gilt

$$f'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 + \log(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

das heißt, $x = 1/\mathrm{e}$ ist eine mögliche Extremstelle. Wegen $\mathrm{e}^y > 0$ ($y \in \mathbb{R}$) gilt für $0 < x < 1/\mathrm{e}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot (1 + \log(x)) < \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot \left(1 + \log\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) = \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot (1 + (-1)) = 0.$$

Also ist $f$ auf $(0, 1/\mathrm{e})$ streng monoton fallend. Analog erhält man $f'(x) > 0$ für alle $x > 1/\mathrm{e}$, das heißt, $f$ ist auf $(1/\mathrm{e}, \infty)$ streng monoton wachsend. Somit ist $x = 1/\mathrm{e}$ die gesuchte Extremstelle und es gilt

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{\log(1/\mathrm{e})/\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}. \qquad \square$$