Karlsruher Institut für Technologie

2. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 13

Abgabe: 9. Februar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(i) $f(x) = \begin{cases} e^{\cos(x)}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(b) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(1 + e^x)}{\sqrt{1 + x^2}}$,

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}$.

Aufgabe 2 (K) $2 + 2 + (2 + 2) + 2 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \log(x) \cdot \log(1 - x)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(b) Zeigen Sie, dass für den Tangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ gilt: $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, dass die Umkehrabbildung Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\cos(x)}$ gegeben. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2 f(x, \pi/2)$ von f im Entwicklungspunkt $\pi/2$ und zeigen Sie

$$\left|f(x) - T_2 f\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\right| \le 2 \cdot 10^{-3} \qquad \text{für} \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}\right].$$

(ii) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$,

(b) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Extrema in 0:

(i) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^3}\Big)$,

(ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^4}\Big)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Teile der Ableitung Sie tatsächlich ausrechnen müssen.

(c) (i) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$. Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 4.

(ii) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

Aufgabe 4.

(a) Wir betrachten wieder die Potenzreihen des Sinus Hyperbolicus und des Cosinus Hyperbolicus,

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

für $x \in \mathbb{R}$, mit Konvergenzradius ∞.

(i) Bestimmen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.

(ii) Zeigen Sie, dass sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst und dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus, der Areasinus Hyperbolicus $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\operatorname{arsinh}'(y) = 1/(\sqrt{1+y^2})$ für $y \in \mathbb{R}$.

(iv) Zeigen Sie $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nützliche Eigenschaften dieser Funktionen haben wir bereits auf Übungsblatt 8 kennengelernt.

(b) Es sei $f:\ (-2,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(x+2)$. Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom $T_3 f$ zu f im Entwicklungspunkt 1 und zeigen Sie, dass gilt:

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0,2]).$$

(c) Sei $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^x$. Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für das N-te Taylorpolynom von f in 0 gilt:

$$|f(x) - T_N f(x,0)| \leq 10^{-6} \qquad \text{für} \qquad x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right],$$

und geben Sie dieses Taylorpolynom explizit an.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 2. Februar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.