9. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+(1+1+1) = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(i) $f(x) = \begin{cases} e^{\cos(x)}, & x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{1}{x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(b) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\cos(x)} \sin(x), & x \in (-\infty, 0), \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

in 0 ist f nicht differenzierbar.

Auf den offenen Mengen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Mit der Kettenregel erhält man für $x \in (-\infty, 0)$

$$f'(x) = e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -e^{\cos(x)} \sin(x).$$

Auf $(0, \infty)$ gilt $f'(x) = -1/x^2$. Weiter gilt für $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \to \infty \quad (x \to 0),$$

somit ist f in $x = 0$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar.

(ii) *Behauptung:* f ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für alle $x \neq 0$ ist f als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Weiter gilt für $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

und damit folgt

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

das heißt, f ist differenzierbar in 0 und es gilt $f'(0) = 0$.

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2)/x^4 = 1/2$.

Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ \text{"0/0"}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}2x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{2x^2} \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ \text{"0/0"}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to\infty}\log(1+\mathrm{e}^x)/\sqrt{1+x^2} = 1$.

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ \text{"}\infty/\infty\text{"}}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{x/\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{-2}+1}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 1.$$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)/(x^2-x+2) = 0$.

Es gilt:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1-2}{1^2-1+2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Bemerkung: Hier ist der Satz von de l'Hospital nicht anwendbar. □

Aufgabe 2 (K) $2+2+(2+2)+2 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \log(x) \cdot \log(1-x)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(b) Zeigen Sie, dass für den Tangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ gilt: $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, dass die Umkehrabbildung Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$ gegeben. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2 f(x, \pi/2)$ von f im Entwicklungspunkt $\pi/2$ und zeigen Sie

$$\left|f(x) - T_2 f\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot 10^{-3} \qquad \text{für} \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}\right].$$

(ii) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f und f'' seien beschränkt. Beweisen Sie, dass dann auch f' beschränkt ist.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0} \log(x) \cdot \log(1-x) = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \log(x)\log(1-x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{1/\log(x)} \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ \text{"0/0"}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/1-x}{-1/\log(x)^2 \cdot 1/x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\log(x)^2}{1-x} = \left(\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log(x)\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 0.\end{aligned}$$

(b) *Behauptung:* Es gilt $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Seine Umkehrabbildung $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ist differenzierbar mit $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.

Der Tangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und die Ableitung ist $\tan'(x) = 1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ $(x \in (-\pi/2, \pi/2))$. Also ist tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend, die Umkehrabbildung existiert also. Weiter gilt für $x \in (0, \pi/2)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \xrightarrow{x\to\pi/2} +\infty,$$

für $x \in (-\pi/2, 0)$ gilt

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \xrightarrow{x\to-\pi/2} -\infty.$$

Da tan stetig ist, nimmt tan nach dem Zwischenwertsatz jeden reellen Wert an, das heißt, $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Somit gilt $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Nach Satz 9.3 ist arctan differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(c) (i) *Behauptung:* Das Taylorpolynom ist gegeben durch $T_2 f(x, \pi/2) = 1 - (x - \pi/2) + 1/2(x - \pi/2)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$, und es gilt $|f(x) - T_2 f(x, \pi/2)| \leq 2 \cdot 10^{-3}$ für $x \in [\pi/2 - 1/10, \pi/2 + 1/10]$.

Zunächst ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ als Komposition von C^∞-Funktionen. Es gelten für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{\cos(x)} \sin(x),\\
f''(x) &= e^{\cos(x)} \sin(x)^2 - e^{\cos(x)} \cos(x) = e^{\cos(x)}\big(\sin(x)^2 - \cos(x)\big),\\
f'''(x) &= -e^{\cos(x)} \sin(x)\big(\sin(x)^2 - \cos(x)\big) + e^{\cos(x)}(2\sin(x)\cos(x) + \sin(x))\\
&= e^{\cos(x)} \sin(x)\big(3\cos(x) + 1 - \sin(x)^2\big)\\
&= e^{\cos(x)} \sin(x)\big(3\cos(x) + \cos(x)^2\big).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Taylorpolynom 2. Ordnung für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
T_2 f\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) &= f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + f'\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2} f''\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2\\
&= 1 - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2,
\end{aligned}$$

wobei wir $\sin(\pi/2) = 1, \cos(\pi/2) = 0$ genutzt haben.

Wir müssen für $x \in [\pi/2 - 1/10, \pi/2 + 1/10]$ die gewünschte Abschätzung

$$\Big|f(x) - T_2 f\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big)\Big| \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

zeigen. Für $x = \pi/2$ gilt dies offensichtlich. Für $x \neq \pi/2$ existiert nach dem Satz von Taylor ein ξ zwischen $\pi/2$ und x so, dass

$$f(x) = T_2 f\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{f'''(\xi)}{3!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Big|f(x) - T_2 f\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big)\Big| &= \Big|\frac{f'''(\xi)}{3!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3\Big|\\
&= \frac{|e^{\cos(\xi)} \sin(\xi)(3\cos(\xi) + \cos(\xi)^2)|}{6}\Big|x - \frac{\pi}{2}\Big|^3\\
&\leq \frac{e \cdot 1 \cdot 4}{6}\Big(\frac{1}{10}\Big)^3 \leq \frac{3 \cdot 1 \cdot 4}{6}\Big(\frac{1}{10}\Big)^3 = 2 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

(ii) Sei $x \in [-\pi, \pi]$.

Zunächst gilt: Es gilt $\cos(0) = 1 \leq 1 = 1 - 0^2/2 + 0^4/24$. Sei ab sofort $x \neq 0$.

Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen 0 und x so, dass

$$\cos(x) = \cos(0) - \frac{\sin(0)}{1!}x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{24}x^4 - \frac{\sin(\xi)}{5!}x^5$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\sin(\xi)}{5!}x^5$$

gilt. Wir erinnern uns daran, dass $\sin(y) > 0$ gilt für $y \in (0, \pi)$, wie in der Übung gezeigt wurde.

Sei zuerst $x > 0$. Dann ist

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{5!}\underbrace{\sin(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{x^5}_{>0} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Für $x < 0$ finden wir

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{5!}\underbrace{\sin(-\xi)}_{\geq 0}\underbrace{x^5}_{<0} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

wobei wir $\sin(\xi) = -\sin(-\xi)$ verwendet haben.

(d) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Taylor (mit $x = x_0 + 1$) existiert ein $\xi \in (x_0, x_0 + 1)$ so, dass

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + f'(x_0) + 1/2 f''(\xi)$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} |f'(x_0)| &= \left| f(x_0 + 1) - f(x_0) - \frac{1}{2} f''(\xi) \right| \\ &\leq 2\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} + \frac{1}{2}\sup\{|f''(x)| : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Da x_0 beliebig ist, zeigt das die Beschränktheit von f'. □

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$,

(b) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Extrema in 0:

(i) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1 - x^3}\right)$,

(ii) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1 - x^4}\right)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Teile der Ableitung Sie tatsächlich ausrechnen müssen.

(c) (i) Es sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$. Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom $T_3 f$ im Entwicklungspunkt 4.

(ii) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{für alle } x \in [0, \infty).$$

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 0} \sin(\sin(x))/x = 1$.

Wir setzen $f(x) = \sin(\sin(x))$ und $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann sind f und g differenzierbar. Ferner existiert $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Damit erhalten wir nach den Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{x\to 1}(x^x - x)/(1 - x + \log(x)) = -2$.

Wir setzen $f(x) = x^x - x$ und $g(x) = 1 - x + \log(x)$ für $x > 0$. Es gilt $f(x) = \mathrm{e}^{\log(x^x)} = \mathrm{e}^{x\log(x)}$. Also sind f und g zweimal differenzierbar mit

$$f'(x) = x^x \cdot \left(\log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 1 = x^x(\log(x) + 1) - 1, \quad g'(x) = -1 + \frac{1}{x},$$
$$f''(x) = x^x(\log(x) + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ferner existiert $\lim_{x\to 1} f''(x)/g''(x)$ (siehe unten) und es gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = 0.$$

Damit erhalten wir durch zweifaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x) + 1) - 1}{-1 + 1/x} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\log(x) + 1)^2 + x^x \cdot 1/x}{-1/x^2} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.\end{aligned}$$

(b) (i) Da $f \in C^\infty([-1, 1])$ als Komposition von C^∞-Funktionen, berechnen wir

$$f'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{1/(x^3-1)}x^2}{(1 - x^3)^2},$$
$$f''(x) = \frac{3\mathrm{e}^{1/(x^3-1)}x(4x^6 + x^3 - 2)}{(x^3 - 1)^4}$$

und

$$f^{(3)}(x) = -\frac{3\mathrm{e}^{1/(x^3-1)}(20x^{12} + 28x^9 - 51x^6 + 10x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^6}.$$

Da $f'(0) = f''(0) = 0$, aber $f^{(3)}(0) = -6/\mathrm{e} \neq 0$ und 0 ein innerer Punkt des Intervalls $[-1, 1]$ ist, folgt mit Satz 9.13, dass f in 0 kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt hat.

(ii) Da $f \in C^\infty([-1,1])$ als Komposition von C^∞-Funktionen, berechnen wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{4e^{1/(x^4-1)}x^3}{(1-x^4)^2}, \\
f''(x) &= \frac{4e^{1/(x^4-1)}x^2(5x^8+2x^4+2)}{(x^4-1)^4}, \\
f^{(3)} &= -\frac{8e^{1/(x^4-1)}x(15x^{16}+30x^{12}-46x^8+6x^4+3)}{(x^4-1)^6}
\end{aligned}$$

und

$$f^{(4)} = -\frac{8e^{1/(x^4-1)}(105x^{24}+540x^{20}-735x^{16}-184x^{12}+423x^8-84x^4-3)}{(x^4-1)^8}.$$

Da $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$, aber $f^{(4)}(0) = -24/e < 0$ und 0 ein innerer Punkt des Intervalls $[-1,1]$ ist, folgt mit Satz 9.13, dass f in 0 ein Maximum hat.

Bemerkung: Man muss nur die Teile der Ableitung ausrechnen, die ausgewertet bei 0 nicht unbedingt 0 sind, das heißt, große Teile der Polynome im Zähler muss man nicht ausrechnen, nur die konstanten Faktoren sind hier wichtig. Das spart eine Menge Rechenaufwand.

(c) (i) *Behauptung:* Es gilt $T_3f(x,4) = 2 + 1/4(x-4) - 1/64(x-4)^2 + 1/512(x-4)^2$ für alle $x \in (0,\infty)$.

Es gilt $f \in C^\infty((0,\infty))$ und daher berechnen wir für $x \in (0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}, & f'(4) &= \frac{1}{4}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2}, & f''(4) &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{32}, \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2}, & f'''(4) &= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}^5} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32} = \frac{3}{256}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
T_3f(x,4) &= \sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(4)}{k!}(x-4)^k \\
&= \frac{2}{1}(x-4)^0 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{3}{256}\cdot\frac{1}{6}(x-4)^3 \\
&= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3.
\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Dann ist $f \in C^\infty([0,\infty))$ und für $x \in [0,\infty)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}.$$

Damit erhalten wir

$$T_2 f(x,0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Für $x = 0$ gilt in der behaupteten Ungleichung sogar Gleichheit, sei nun also $x > 0$. Dann existiert nach dem Satz von Taylor (Satz 9.20) ein $\xi \in (0,x)$ mit

$$f(x) = T_2 f(x,0) + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 = T_2 f(x,0) + \frac{1}{16(1+\xi)^{5/2}} x^3$$

Wegen $1/(16(1+\xi)^{5/2})x^3 \geq 0$ erhalten wir die behauptete Abschätzung

$$\sqrt{1+x} = f(x) \geq T_2 f(x,0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2. \qquad \square$$

Aufgabe 4.

(a) Wir betrachten wieder die Potenzreihen des Sinus Hyperbolicus und des Cosinus Hyperbolicus,

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

für $x \in \mathbb{R}$, mit Konvergenzradius ∞.

(i) Bestimmen Sie die Ableitungen von sinh und cosh.

(ii) Zeigen Sie, dass sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst und dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus, der Areasinus Hyperbolicus $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\operatorname{arsinh}'(y) = 1/(\sqrt{1+y^2})$ für $y \in \mathbb{R}$.

(iv) Zeigen Sie $\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nützliche Eigenschaften dieser Funktionen haben wir bereits auf Übungsblatt 8 kennengelernt.

(b) Es sei $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(x+2)$. Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom $T_3 f$ zu f im Entwicklungspunkt 1 und zeigen Sie, dass gilt:

$$|(T_3 f)(x) - f(x)| < 0.02 \quad (x \in [0,2]).$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^x$. Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für das N-te Taylorpolynom von f in 0 gilt:

$$|f(x) - T_N f(x,0)| \leq 10^{-6} \qquad \text{für} \qquad x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right],$$

und geben Sie dieses Taylorpolynom explizit an.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktionen sinh und cosh sind beliebig oft differenzierbar. Die erste Ableitung ist gegeben durch $\sinh' = \cosh$ bzw. $\cosh' = \sinh$.

Nach Übungsblatt 8 gelten $\sinh(x) = 1/2\mathrm{e}^x - 1/2\mathrm{e}^{-x}$ sowie $\cosh(x) = 1/2\mathrm{e}^x + 1/2\mathrm{e}^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Für die Terme auf der rechten Seite ist bekannt, dass es sich um beliebig oft differenzierbare Funktionen handelt. Als Ableitung erhält man für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \cosh(x),\\ \cosh'(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \sinh(x).\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Ableitungen auch aus der Potenzreihe ablesen, zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}&\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ \rightsquigarrow\quad &\sinh'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von cosh kann man ähnlich berechnen.

(ii) Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist sinh gemäß Satz 9.9 streng monoton wachsend. Weiter gelten

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\substack{\to\infty\\(x\to\infty)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\substack{\to 0\\(x\to\infty)}} \to \infty \ (x \to \infty),\\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\substack{\to 0\\(x\to-\infty)}} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\substack{\to\infty\\(x\to-\infty)}} \to -\infty \ (x \to -\infty).\end{aligned}$$

Da sinh als Potenzreihe stetig ist, nimmt sinh nach dem Zwischenwertsatz jede reelle Zahl als Wert an, das heißt, $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(iii) Aus Übungsblatt 8 wissen wir, dass $\cosh(x)^2 = 1 + \sinh(x)^2$ gilt, und damit $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh(x)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$; dies werden wir bald benötigen. Nach Satz 9.3 über die Umkehrfunktion, wobei wir $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für $y \in \mathbb{R}$ benutzen, ist arsinh differenzierbar, die Ableitung ist für $y \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

(iv) Zuerst bemerken wir, dass wegen $y + \sqrt{y^2 + 1} > y + \sqrt{y^2} = y + |y| \geq 0$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ tatsächlich wohldefiniert ist. Diese

Funktion ist differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. Wir berechnen die Ableitung als

$$f'(y) = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

für $y \in \mathbb{R}$. Zusammen mit Teil (iii) sehen wir, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(y) - \operatorname{arsinh}(y)$ Ableitung konstant gleich 0 hat. Nach Vorlesung ist g konstant. Wegen $\sinh(0) = 0$ gilt aber auch $g(0) = \log(0+\sqrt{0^2+1}) - \operatorname{arsinh}(0) = 0 - 0$, sodass g konstant gleich 0 ist. Also ist $f = \operatorname{arsinh}$.

(b) Es gilt $f \in C^\infty((-2,\infty))$ und daher berechnen wir die ersten drei Ableitungen. Es gilt für $x \in (-2,\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_3 f(x,1) &= \log(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{6}(x-1)^3 \\ &= \log(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Taylor existiert zu $x \in [0,2]$ ein ξ zwischen x und 1, sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 = T_3 f(x,1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4.$$

Wegen $x \in [0,2]$ gilt $|x-1| \le 1$. Für alle $t > -2$ haben wir weiter $f^{(4)}(t) = -6/(t+2)^4$. Dies liefert wegen $\xi \in [0,2]$

$$\begin{aligned} |T_3 f(x,1) - f(x)| &= \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4\right| = \frac{(x-1)^4}{24}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{1}{24}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \\ &= \frac{1}{24}\cdot\frac{6}{(\xi+2)^4} \le \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = 0.02. \end{aligned}$$

(c) *Behauptung:* Für $N = 4$ gilt $T_4 f(x,0) = 1 + x - x^3/3 - x^4/6$ für $x \in \mathbb{R}$, und die Ungleichung $|f(x) - T_4 f(x,0)| \le 10^{-6}$ ist für alle $x \in [-1/10, 1/10]$ erfüllt.

Zunächst ist f beliebig oft differenzierbar als Komposition beliebig oft differenzierbarer Funktionen. Wir berechnen die ersten Ableitungen von f; für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x = (\cos(x) - \sin(x))e^x, \\ f''(x) &= (-\sin(x) - \cos(x))e^x + (\cos(x) - \sin(x))e^x = -2\sin(x)e^x \\ f'''(x) &= -2\cos(x)e^x - 2\sin(x)e^x = -2(\cos(x)+\sin(x))e^x, \\ f''''(x) &= -2(-\sin(x)+\cos(x))e^x - 2(\cos(x)+\sin(x))e^x = -4\cos(x)e^x = -4f(x). \end{aligned}$$

Induktiv erhält man für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= (-4)^k \cos(x)\mathrm{e}^x, \\ f^{(4k+1)}(x) &= (-4)^k(\cos(x) - \sin(x))\mathrm{e}^x, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -2 \cdot (-4)^k \sin(x)\mathrm{e}^x, \\ f^{(4k+3)}(x) &= -2 \cdot (-4)^k(\cos(x) + \sin(x))\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$T_4 f(x, 0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}.$$

Es bleibt die Fehlerabschätzung zu beweisen. Im Falle $x = 0$ ist diese trivial. Sei also ab sofort $x \in [-1/10, 1/10] \setminus \{0\}$. Nach Vorlesung existiert dann ein ξ zwischen 0 und x mit

$$|f(x) - T_4 f(x, 0)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5\right| = \frac{4|\cos(\xi) - \sin(\xi)|\mathrm{e}^\xi}{120}|x|^5 < \frac{4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{120}10^{-5} = 10^{-6},$$

wobei wir $\mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^{1/10} < 3/2$ verwendet haben, was wegen $\mathrm{e} < 3 < 57{,}6650390625 = (3/2)^{10}$ gilt. $\square$