Karlsruher Institut für Technologie

9. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 14

Abgabe: 16. Februar 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Seien $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein Intervall, $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, wobei $0 \notin f(I)$ gelte.

(ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(iii) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f(x)^2}}\,\mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4x + 1}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (K) $(2 + 2) + (2 + 2) + 2 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a, b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$.

(i) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

(ii) Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $g \in C([a, b])$, so gilt bereits $f = 0$.

(c) Seien I, J Intervalle, $f, g : I \to J$ differenzierbar und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x-1|\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Seien $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein Intervall, $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(x) \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie jeweils, dass die Funktion f auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie den Integralwert:

(i) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$,

(ii) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Betrachten Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z_n = \{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ von $[0, 1]$ und gehen Sie jeweils wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie $U_f(Z_n)$ sowie $O_f(Z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie mithilfe von (i): $\lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) =: I$.

(iii) Zeigen Sie mithilfe von (ii): $f \in R([0, 1])$ und $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

Hinweis: Sie können für (i) verwenden, dass $\sum_{k=0}^{m} k^2 = (m(m+1)(2m+1))/6$ *für* $m \in \mathbb{N}_0$ *gilt.*

(b) Sei $f \in R([0, 1])$. Es gelten

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0, 1]$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)(x-1/2)^2\,\mathrm{d}x$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 9. Februar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.