Karlsruher Institut für Technologie

16. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (K) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Seien $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein Intervall, $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, wobei $0 \notin f(I)$ gelte.

(ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(iii) $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f(x)^2}}\,\mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4x + 1}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag. Alle Funktionen in dieser Aufgabe sind auf dem Integrationsbereich stetig und somit Riemann-integrierbar.

(a) (i) *Behauptung:* Es gilt $\int_a^b f'(x)/f(x)\,\mathrm{d}x = \log(|f(b)/f(a)|)$.

Wir definieren $g\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(|f(x)|)$.

Fall 1: Es gelte $f(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt $g(x) = \log(f(x))$ für $x \in I$. Gemäß Kettenregel ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

für $x \in I$.

Fall 2: Es gelte $f(x) < 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt $g(x) = \log(-f(x))$ für $x \in I$. Gemäß Kettenregel ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

für $x \in I$.

Fall 3: f sei weder überall positiv noch überall negativ. Dann besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, was wir explizit ausgeschlossen hatten. Also kann dieser Fall nie eintreten.

Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_a^b = \log\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_a^b f'(x)/(1+f(x)^2)\,\mathrm{d}x = \arctan(f(b)) - \arctan(f(a))$.

Wir definieren $g : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(f(x))$. Nach Kettenregel ist g differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

für $x \in I$. Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_a^b = \arctan f(b) - \arctan f(a).$$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\int_a^b f'(x)/\sqrt{1+f(x)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(f(b)) - \operatorname{arsinh}(f(a))$.

Wir definieren $g : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{arsinh}(f(x))$. In Übungsblatt 13 haben wir gesehen, dass arsinh differenzierbar ist mit Ableitung $\operatorname{arsinh}'(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Nach Kettenregel ist g differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f(x)^2}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$$

für $x \in I$. Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_a^b = \operatorname{arsinh} f(b) - \operatorname{arsinh} f(a).$$

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 (-3x^2+6x-4)/(x^3-3x^2+4x+1)\,\mathrm{d}x = -\log(3)$.

Wir erkennen, dass im Zähler bis auf einen Faktor von -1 die Ableitung des Nenners steht, erinnern uns an Aufgabe 1 (a) (i) und erhalten so:

$$\int_0^1 \frac{-3x^2+6x-4}{x^3-3x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x = \big(-\log(x^3-3x^2+4x+1)\big)_0^1 = -\log(3).$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\pi/2} (\sin(x)\cos(x))/(1+\cos(x)^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(2)$.

Die Funktion $x \mapsto 1+\cos(x)^2$ hat Ableitung $x \mapsto -2\cos(x)\sin(x)$. Wir können also Aufgabe 1 (a) (i) anwenden und erhalten so:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\log(1+\cos(x)^2)\right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\log(2). \qquad \square$$

Aufgabe 2 (K) $(2+2)+(2+2)+2=10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a,b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right) \mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a,b])$.

(i) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, so gilt bereits $f = 0$.

(ii) Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $g \in C([a,b])$, so gilt bereits $f = 0$.

(c) Seien I, J Intervalle, $f, g\colon I \to J$ differenzierbar und $h\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\pi/4}(2/\cos^2(x)+4x)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^{\pi^2/16+1}-1)$.

Die Funktion $g\colon [0,\pi/4] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = (2/\cos^2(x)+4x)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}$ ist stetig, also gilt $g \in R([0,\pi/4])$. Wegen der Kettenregel ist nun $G\colon [0,\pi/4] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) = 2\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}$ eine Stammfunktion von g auf $[0,\pi/4]$, denn es gilt

$$G'(x) = 2\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\left(\frac{1}{\cos^2(x)} + 2x\right) = \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2} \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{2}{\cos^2(x)} + 4x\right)\mathrm{e}^{\tan(x)+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} g(x)\,\mathrm{d}x = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0)\\ &= 2\mathrm{e}^{\tan(\pi/4)+(\pi/4)^2} - 2\mathrm{e}^{\tan(0)+0^2}\\ &= 2\left(\mathrm{e}^{\pi^2/16+1}-1\right).\end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \tan(\sqrt{x})/(\cos(\sqrt{x})\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 4-2\sqrt{2}$.

Die Funktion $g\colon [\pi^2/16, \pi^2/9] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \tan(\sqrt{x})/(\cos(\sqrt{x})\sqrt{x})$ ist stetig, also gilt $g \in R([\pi^2/16, \pi^2/9])$. Außerdem gilt für $x \in [\pi^2/16, \pi^2/9]$ die Umformung

$$g(x) = \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}.$$

Wegen der Kettenregel ist nun $G\colon [\pi^2/16, \pi^2/9] \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x) = 2/\cos(\sqrt{x})$ eine Stammfunktion von g, denn es gilt

$$G'(x) = -\frac{2}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot (-\sin(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = g(x) \quad \left(x \in \left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right]\right).$$

Der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} g(x)\,\mathrm{d}x = G\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - G\left(\frac{\pi^2}{16}\right) \\ &= \frac{2}{\cos\left(\sqrt{\pi^2/9}\right)} - \frac{2}{\cos\left(\sqrt{\pi^2/16}\right)} \\ &= \frac{2}{\cos(\pi/3)} - \frac{2}{\cos(\pi/4)} = \frac{2}{1/2} - \frac{2}{1/2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(b) (i) Es gelte $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Wir nehmen nun an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Da f stetig auf $[a,b]$ ist, existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > 0$. Da (a,b) offen und f stetig ist, existiert ferner ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq (a,b)$ und $f(x) \geq f(x_0)/2 > 0$ für alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Mit Satz 10.7 und Satz 10.2 (a) folgt somit

$$\begin{aligned}0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-r} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-r}^{x_0+r} \underbrace{f(x)}_{\geq f(x_0)/2}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+r}^{b} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^{x_0-r} 0\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{f(x_0)}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+r}^{b} 0\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{f(x_0)}{2}(x_0 + r - (x_0 - r)) + 0 = f(x_0)r > 0,\end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch. Folglich war die Annahme falsch und es gilt $f = 0$.

(ii) Mit der Wahl $g = f$ folgt insbesondere, dass $\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$ ist. Da $f^2 \geq 0$ folgt mit Aufgabenteil (i), dass $f^2 = 0$ gilt, und somit ist $f = 0$.

(c) *Behauptung:* φ ist differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$ für $x \in I$.

Es bezeichne H eine Stammfunktion von h. (Sie existiert aufgrund der Aussage des zweiten Hauptsatzes.) Dann gilt nach dem 1. Hauptsatz, Satz 10.6 für $x \in I$:

$$\varphi(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,\mathrm{d}t = H(g(x)) - H(f(x)).$$

Da f, g und H differenzierbar sind, ist der Ausdruck auf der rechten Seite als Funktion in x differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

für $x \in I$. □

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x-1| \,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x$.

(b) Seien $I = [a,b]$ mit $a < b$ ein Intervall, $f \in C^1(I,\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(x)f(x) \,\mathrm{d}x$.

(ii) $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} \,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag. Alle Funktionen in dieser Aufgabe sind auf dem Integrationsbereich stetig und somit Riemann-integrierbar.

(a) (i) *Behauptung:* Es gilt $\int_{-2}^{2} |x-1| \,\mathrm{d}x = 5$.

Wir benutzen Satz 10.7 und berechnen

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x-1| \,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{1} |x-1| \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} |x-1| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{1} 1-x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x-1 \,\mathrm{d}x \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} - (-2) + \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 5.\end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 1/(x^2-x-2)\,\mathrm{d}x = -2\log(2)/3$.

Es gilt

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Wie in der Übung machen den Ansatz

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest (das heißt, unabhängig von x). Dies führt zu $a = 1/3, b = -1/3$, was man durch Lösen des entsprechenden LGS sieht, vergleiche Übung. Alternativ kann man auch geschickt raten:

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1/3((x+1)-(x-2))}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Daraus folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[\log(2-x) - \log(x+1)]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}(0 - \log(2) - \log(2) + 0) = -\frac{2}{3}\log(2).$$

(b) (i) *Behauptung:* Es gilt $\int_a^b f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2(f(b)^2 - f(a)^2)$.

Wir definieren $g\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/2 f(x)^2$. Nach Kettenregel ist g differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) \cdot f'(x) = f'(x)f(x)$$

für $x \in I$.

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(b)} - \mathrm{e}^{f(a)}$.

Wir definieren $g\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$. Dann gilt $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$, also folgt die Behauptung mit Satz 10.11. □

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie jeweils, dass die Funktion f auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie den Integralwert:

(i) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$,

(ii) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Betrachten Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z_n = \{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ von $[0,1]$ und gehen Sie jeweils wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie $U_f(Z_n)$ sowie $O_f(Z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie mithilfe von (i): $\lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) =: I$.

(iii) Zeigen Sie mithilfe von (ii): $f \in R([0,1])$ und $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

Hinweis: Sie können für (i) verwenden, dass $\sum_{k=0}^m k^2 = (m(m+1)(2m+1))/6$ für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Sei $f \in R([0,1])$. Es gelten

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)(x-1/2)^2\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktion $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist Riemann-integrierbar und es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/3$.

Teil 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. In der Notation der Vorlesung gelten für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} I_j &= \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \\ m_j &= \inf\{f(x):\ x \in I_j\} = \left(\frac{j-1}{n}\right)^2, \\ M_j &= \sup\{f(x):\ x \in I_j\} = \left(\frac{j}{n}\right)^2, \\ |I_j| &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Damit folgen unter Ausnutzung des Hinweises:

$$\begin{aligned} U_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n m_j |I_j| = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n (j-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \\ O_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^n M_j |I_j| = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Teil 2: Es konvergieren

$$U_f(Z_n) = \frac{(1-1/n)(2-1/n)}{6} \to \frac{1}{3}, \qquad O_f(Z_n) = \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} \to \frac{1}{3}$$

für $n \to \infty$.

Teil 3: Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x = \inf\{O_f(Z):\ Z \in \mathcal{Z}\} &\le \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) \\ &\le \sup\{U_f(Z):\ Z \in \mathcal{Z}\} = \underline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt aber auch stets $\underline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x$ nach Vorlesung, also gilt $\overline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x = \underline{\int_0^1} x^2\,\mathrm{d}x = 1/3$, das heißt, f ist Riemann-integrierbar und $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/3$.

(ii) *Behauptung:* Die Funktion $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ ist Riemann-integrierbar und es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Teil 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $r = \mathrm{e}^{-1/n}$. In der Notation der Vorlesung gelten für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$I_j = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right],$$

$$\begin{aligned}
m_j &= \inf\{f(x):\ x \in I_j\} = \mathrm{e}^{-j/n} = r^j,\\
M_j &= \sup\{f(x):\ x \in I_j\} = \mathrm{e}^{-(j-1)/n} = r^{j-1},\\
|I_j| &= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}
U_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} m_j|I_j| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r^j = \frac{r}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{r}{n}\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{n}\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}},\\
O_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} M_j|I_j| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r^{j-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1}{n}\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{n}\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}.
\end{aligned}$$

Teil 2: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\mathrm{e}^{-1/n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-1/n}}{1/n} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \overset{\substack{\text{l'Hospital}\\ 0/0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1} = 1,$$

woraus wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} U_f(Z_n) = 1-\mathrm{e}^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = 1-\mathrm{e}^{-1}.$$

Teil 3: Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\int_0^1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \inf\{O_f(Z):\ Z \in \mathcal{Z}\} &\le \lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = 1-\mathrm{e}^{-1} = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n)\\
&\le \sup\{U_f(Z):\ Z\in\mathcal{Z}\} = \underline{\int_0^1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt aber auch stets $\overline{\int_0^1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_0^1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ nach Vorlesung, also $\overline{\int_0^1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \overline{\int_0^1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-1}$, das heißt, f ist Riemann-integrierbar und $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-1}$.

(b) Wir nehmen zum Widerspruch an, die Behauptung gelte nicht. Zuerst gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x \le \int_0^1 11\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{11}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{11}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{11}{12} < 1,$$

was wegen des oben Gezeigten nicht gelten kann. $\square$