Karlsruher Institut für Technologie

16. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 15
Keine Abgabe.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^{1} x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\displaystyle\int_1^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$,

(h) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\log(x)\,\mathrm{d}x$,

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin(x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2.

(a) Untersuchen Sie jeweils die Folge von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(i) $f_n(x) = \dfrac{\cos(x/n)}{1+x^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$.

(ii) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$,

(iii) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-nx^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$,

(iv) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + nx}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$.

(b) (i) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ sehr wohl existiert.

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(i) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sin(x)}{(x-2)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\log(1+x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-2|x|}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x,\ s < 0, t \in \mathbb{R}$,

(iii) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\log(x)^2 \cdot x}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sinh(x) - x}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\displaystyle\int_0^1 \log(x)^3\,\mathrm{d}x$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 16. Februar 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt behandelt wurde.