23. Februar 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 15

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$,

(h) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\log(x)\,\mathrm{d}x$,

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag.

(a) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\pi/2}(\sin(x)\cos(x))/(1+\sin^2(x))\,\mathrm{d}x = \log(2)/2$.

Mit der Substitution $y = y(x) = \sin^2(x)$ gilt $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$ und $\mathrm{d}y = 2\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. Damit erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\log(1+y)\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2}(\log(2) - \log(1)) = \frac{1}{2}\log(2).$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x \mapsto \log(1 + \sin^2(x))/2$ eine Stammfunktion des Integranden ist.

(b) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - 5/(2\mathrm{e})$.

Mit zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^4 x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{(P. I.)}}{=} \left[x^4\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x^3\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(P. I.)}}{=} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 4x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} + 1.
\end{aligned}$$

(c) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x = (1 - \mathrm{e}^{-4\pi})/17$.

Wir wenden zweimal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{(P. I.)}}{=} [-\mathrm{e}^{-x}\cos(4x)]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi} (-\mathrm{e}^{-x})(-4\sin(4x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\cos(16\pi)}_{=1} + 1 - 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(P. I.)}}{=} 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left([-\mathrm{e}^{-x}\sin(4x)]_{x=0}^{x=4\pi} - \int_0^{4\pi} -\mathrm{e}^{-x}4\cos(4x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 4\left(-\mathrm{e}^{-4\pi}\underbrace{\sin(16\pi)}_{=0} + 0 + 4\int_0^{4\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} - 16I.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$17I = 1 - \mathrm{e}^{-4\pi} \iff \int_0^{4\pi} e^{-x}\cos(4x)\,\mathrm{d}x = I = \frac{1}{17}\left(1 - \mathrm{e}^{-4\pi}\right).$$

(d) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\pi/4} \sin(2x)/(1 - \sin(x))\,\mathrm{d}x = \log(2) - 2\log(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}$.

Mithilfe der Additionstheoreme erhalten wir zunächst

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1 - \sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1 - \sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $y = y(x) = \sin(x)$ gilt $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ und $\mathrm{d}y = \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2y\sqrt{1-y^2}}{1-y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{y}{1-y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-y} - 1\right)\mathrm{d}y = 2[-\log(1-y) - y]_{y=0}^{y=1/\sqrt{2}} \\
&= 2\left(-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = -2\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \\
&= \log(2) - 2\log(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(e) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 x^2/\sqrt{6-2x^3}\,\mathrm{d}x = (\sqrt{6}-2)/3$.

Mit der Substitution $y = y(x) = 6 - 2x^3$ gilt $y(0) = 6$, $y(1) = 4$ und $\mathrm{d}y = -6x^2\,\mathrm{d}x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,\mathrm{d}x &= \int_6^4 -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_4^6 \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}\sqrt{y}\right]_{y=4}^{y=6} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{4} = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-2).
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch direkt einsehen, dass $x \mapsto -\sqrt{6-2x^3}/3$ eine Stammfunktion des Integranden ist.

(f) *Behauptung:* Es gilt $\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x = \pi - 4/3$.

Mit der Substitution $y = y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ ($\iff x = (y^2+1)^2$) gilt $y(1) = 0$, $y(4) = 1$ und $\mathrm{d}y = 1/(4y(y^2+1))\,\mathrm{d}x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \arctan(y)\cdot 4y(y^2+1)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (4y^3+4y)\arctan(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration gilt nun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4y^3+4y)\arctan(y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{(P. I.)}}{=} \left[(y^4+2y^2)\arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{y^4+2y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 3\arctan(1) - \int_0^1 \left(\frac{y^2(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y^2}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \left[\frac{1}{3}y^3 + y - \arctan(y)\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}\right) + 0 = \pi - \frac{4}{3}.$$

(g) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^\pi x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\pi^2/2$.

Wir wenden zweimal partielle Integration an und erhalten so:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{P.I.}}{=} \left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 + \int_0^\pi x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{2}\pi^2 + \left[x \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 + 0 - \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}\pi^2.\end{aligned}$$

(h) *Behauptung:* Es gilt $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \log(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^3/9 + 1/9$.

Wir integrieren partiell und erhalten so:

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \log(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \log(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

(i) *Behauptung:* Es gilt $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

Wir bemerken, dass der Integrand eine ungerade Funktion ist und der Integrationsbereich die Form $[-r, r]$ hat für $r > 0$. So ein Integral hat immer Wert gleich 0. Um das einzusehen, substituieren wir $y = -x$:

$$\int_{-1}^1 \sin(x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{y=-x}{=} \int_1^{-1} \sin((-y)^3)\mathrm{e}^{(-y)^2} \cdot (-1)\,\mathrm{d}y = -\int_{-1}^1 \sin(y^3)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y,$$

woraus sofort $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ folgt. □

Aufgabe 2.

(a) Untersuchen Sie jeweils die Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(i) $f_n(x) = \dfrac{\cos(x/n)}{1+x^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$.

(ii) $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$,

(iii) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$,

(iv) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$.

(b) (i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

(ii) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht existiert, wohingegen der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ sehr wohl existiert.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Die Funktionen f_n konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1/(1+x^2)$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/(4)$.

Wir zeigen zunächst, dass f_n gleichmäßig konvergiert. Dazu seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2} \left|\cos(\frac{x}{n}) - \cos(0)\right| \\ &\leq \frac{1}{1+x^2}\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass cos Lipschitz-stetig ist mit $L = 1$. Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. Weiter sind alle f_n stetig und insbesondere Riemann-integrierbar. Nach Satz 10.8 gilt nun

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0. \end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* Die Funktionen f_n konvergieren für $n \to \infty$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = 1/2$.

Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0, n \to \infty$. Sei nun $x \in (0,1]$ fest. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx\mathrm{e}^{-nx^2} = \lim_{y\to\infty} yx\mathrm{e}^{-yx^2} \overset{z=x^2y}{=} \frac{1}{x} \lim_{z\to\infty} z\mathrm{e}^{-z} = 0.$$

Also konvergiert f_n punktweise gegen f.

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-nx^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{2}.$$

Für $n \to \infty$ folgt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

weshalb die Konvergenz nach Satz 10.8 nicht gleichmäßig gewesen sein kann. Dass f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergiert, kann man auch ohne Betrachtung des Integrals sehen. Zum Beispiel ist für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = \sqrt{n}\mathrm{e}^{-1},$$

was nicht gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$.

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Es gilt $|f_n(x)| = (1/n)\underbrace{\mathrm{e}^{-nx^2}}_{\leq 1} \leq 1/n$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

das heißt, (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen 0. Nach Satz 10.8 der Vorlesung konvergiert damit auch die Folge der Integrale und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

(iv) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Da $\sin(nx)/(1+nx) \leq 1/(1+nx)$ und die rechte Seite für $x = 0$ gegen 1, für $x \neq 0$ jedoch gegen 0 geht für $n \to \infty$ und somit nicht gegen eine stetige Funktion (während die rechte Seite selbst für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist), konvergiert f_n zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen diese Funktion.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{1+nx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\log(1+nx)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{\log(1+n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) (i) *Behauptung:* Dann existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Da das uneigentliche Integral konvergiert, gelten

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren ein $a_0 < 0$ und ein $b_0 > 0$ derart, dass

$$\left|\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $b \geq b_0$ und

$$\left|\int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $a \leq a_0$ erfüllt sind. Für alle $t \geq \max\{b_0, |a_0|\}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-t}^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad\leq \left|\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-t}^0 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert nicht, wohingegen der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ sehr wohl existiert.

Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}\log(1+b^2) \xrightarrow{b\to\infty} \infty,$$

weshalb das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht existiert. Für $t > 0$ gilt allerdings

$$\int_{-t}^t \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{x=-t}^{x=t}$$

$$= \frac{1}{2}(\log(1+t^2) - \log(1+(-1)^2)) = 0 \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

das heißt, es gilt $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. □

Aufgabe 3.

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(i) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sin(x)}{(x-2)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x,\ s<0, t\in\mathbb{R}$,

(iii) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\log(x)^2\cdot x}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sinh(x)-x}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\displaystyle\int_0^1 \log(x)^3\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_2^4 \sin(x)/(x-2)^{2/3}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Definiere $f(x) = \sin(x)/(x-2)^{2/3}$ für $x\in(2,4]$. Es gilt $|f(x)|\le 1/(x-2)^{2/3}$ für alle $x\in(2,4]$. Ferner gilt für $a\in(2,4)$

$$\int_a^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \left[3(x-2)^{1/3}\right]_{x=a}^{x=4} = 3\left(2^{1/3} - (a-2)^{1/3}\right) \xrightarrow{a\to 2} 3\cdot 2^{1/3},$$

das heißt, das uneigentliche Integral $\int_2^4 1/(x-2)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also auch das uneigentliche Integral $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Für alle $x \geq 0$ gilt

$$1 + x \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Da der Logarithmus monoton wächst, folgt $\log(1+x) \leq x$, also $|\mathrm{e}^{-x}\log(1+x)| \leq x\mathrm{e}^{-x}$ für alle $x \geq 0$. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, denn mit partieller Integration folgt für $R > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^R x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= [x(-\mathrm{e}^{-x})]_{x=0}^{x=R} - \int_0^R 1(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -R\mathrm{e}^{-R} + [-\mathrm{e}^{-x}]_{x=0}^{x=R} \\ &= -R\mathrm{e}^{-R} - \mathrm{e}^{-R} + 1 = -\frac{R}{\mathrm{e}^R} - \mathrm{e}^{-R} + 1 \xrightarrow{R\to\infty} 1.\end{aligned}$$

Mit dem Majorantenkriterium konvergiert also auch $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(1+x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$ gilt $x^2 \geq |x|$ und damit auch $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-|x|}$. Ferner gilt für $a < -1$ und $b > 1$

$$\int_a^{-1} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{x=a}^{x=-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^a \xrightarrow{a\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

sowie

$$\int_1^b \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_{x=1}^{x=b} = -\mathrm{e}^{-b} + \frac{1}{\mathrm{e}} \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergieren daher die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ und $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Darüber hinaus existiert auch das Riemann-Integral $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (stetiger Integrand auf kompaktem Intervall). Somit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(iv) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \log(x)/x\,\mathrm{d}x$ divergiert.

Für $R > 2$ gilt

$$\int_2^R \frac{\log(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\log^2(x)\right]_{x=2}^{x=R} = \frac{1}{2}\log^2(R) - \frac{1}{2}\log^2(2) \xrightarrow{R\to\infty} \infty,$$

das heißt, das uneigentliche Integral divergiert.

(b) (i) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x$ konvergiert und es gilt $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = 1$.

Es seien $a < 0 < b$. Dann gilt

$$\int_a^0 \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = \int_a^0 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=a}^{x=0} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right) \xrightarrow{a\to-\infty} \frac{1}{2}$$

sowie

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^b \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right) \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Also existiert das uneigentliche Integral und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = 1$.

(ii) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x$ konvergiert für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$ und es gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = -s/(s^2+t^2)$.

Es seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$. Mit zweifacher partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(P. I.)}}{=} \left[\frac{\mathrm{e}^{sx}}{s}\cos(tx)\right]_{x=0}^{x=R} + \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{sx}}{s} t\sin(tx)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(P. I.)}}{=} \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt) - \frac{1}{s} + \left[\frac{\mathrm{e}^{sx}}{s^2} t\sin(tx)\right]_{x=0}^{R} - \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{sx}}{s^2} t^2\cos(tx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt) - \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s^2} t\sin(Rt) - \frac{t^2}{s^2}\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s}\cos(Rt) - \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{Rs}}{s^2} t\sin(Rt) \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s},$$

da nach Voraussetzung $s < 0$ und damit $\mathrm{e}^{sR} \to 0$ $(R \to \infty)$ und sin und cos beschränkt sind. Somit konvergiert das Integral mit

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+t^2}\right) = -\frac{s}{s^2+t^2}.$$

(iii) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_2^\infty 1/(\log(x)^2\cdot x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert mit $\int_2^\infty 1/(\log(x)^2\cdot x)\,\mathrm{d}x = 1/\log(2)$.

Sei $b > 2$. Mit der Substitution $t = \log(x)$ und »$\mathrm{d}t = 1/x\,\mathrm{d}x$« ergibt sich

$$\int_2^b \frac{1}{\log(x)^2\cdot x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log(2)}^{\log(b)} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\log(2)}^{\log(b)} = -\frac{1}{\log(b)} + \frac{1}{\log(2)} \to \frac{1}{\log(2)}$$

für $b \to \infty$. Also konvergiert das uneigentliche Integral und hat Wert $1/\log(2)$.

(iv) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x/(\sinh(x) - x)\,\mathrm{d}x$ divergiert.

Wir zeigen, dass dieses Integral am linken Rand divergent ist. Es gilt

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

also

$$\sinh(x) - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{3!}x^3 h(x)$$

mit $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 3!/(2k+1)! \cdot x^{2k-2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $h(x) \to h(0) = 1$ für $x \to 0$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $h(x) \le 3!$ für $0 < x \le \varepsilon$. Für dieses x ergibt sich dann $0 < \sinh(x) - x \le x^3$, und damit ist

$$\frac{x}{\sinh(x) - x} \ge \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \ge 0 \qquad \text{für } 0 < x \le \varepsilon.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz des gegebenen Integrals, denn $\int_0^\varepsilon x^{-2}\,dx$ konvergiert nicht.

(v) *Behauptung:* Das uneigentliche Integral $\int_0^1 \log(x)^3\,\mathrm{d}x$ konvergiert und es gilt $\int_0^1 \log(x)^3\,\mathrm{d}x = -6$.

Wir bestimmen eine Stammfunktion von $x \mapsto \log(x)^3$ mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \log(x)^3\,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log(x)^3\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} x\log(x)^3 - \int x \cdot 3\log(x)^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\log(x)^3 - 3\int 1 \cdot \log(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} x\log(x)^3 - 3x\log(x)^2 + 3\int x \cdot 2\log(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\log(x)^3 - 3x\log(x)^2 + 6\int 1 \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} = x\log(x)^3 - 3x\log(x)^2 + 6x\log(x) - 6\int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x(\log(x)^3 - 3\log(x)^2 + 6\log(x) - 6)
\end{aligned}$$

Sei nun $0 < a < 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_a^1 \log(x)^3\,\mathrm{d}x &= \left[x(\log(x)^3 - 3\log(x)^2 + 6\log(x) - 6)\right]_a^1 \\
&= -6 + a(\log(a)^3 - 3\log(a)^2 + 6\log(a) - 6) \to -6
\end{aligned}$$

für $a \to 0$, da für $k \in \mathbb{N}$ der Term $x\log(x)^k$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert. Die letzte Konvergenz erhält man leicht mit Übungsblatt 10 Aufgabe 1 (b) (ii). □