Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \frac{2a_n}{a_n+3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(i) Zeigen Sie: $0 < a_n < 1$ $(n \geq 2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* Es gilt $0 < a_n < 1$ für alle $n \geq 2$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.
IA: Für $n = 2$ gilt $a_2 = \frac{2a_1}{a_1+3} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2} \in (0,1)$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelte bereits $a_n \in (0,1)$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+3} \begin{cases} \overset{a_n<1}{\underset{\text{IV}}{\geq}} \frac{2a_n}{4} = \frac{1}{2}a_n \overset{a_n>0}{\underset{\text{IV}}{>}} 0, \\ \overset{a_n>0}{\underset{\text{IV}}{\leq}} \frac{2a_n}{3} \overset{a_n<1}{\underset{\text{IV}}{\leq}} \frac{2}{3} < 1. \end{cases}$$

Also gilt auch $a_{n+1} \in (0,1)$. $\square$

(ii) *Behauptung:* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 0.

Beweis: Mit Teil (i) gilt $a_n \in (0,1)$ für alle $n \geq 2$ und somit (wegen $1 > 0$) insgesamt $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit erhält man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{a_n+3} \leq \frac{2}{3} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Also gilt $a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend.
Nach dem Monotoniekriterium ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ somit konvergent. Für den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt

$$a = \frac{2a}{a+3} \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a+1) = 0,$$

d.h. $a = 0$ oder $a = -1$. Wegen $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt $a = 0$. $\square$

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(3x))} = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$:

$$r = \boxed{\mathrm{e}}.$$

(iii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^{\log(x)} \sin(\mathrm{e}^{-t})\,dt$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \boxed{\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}}.$$

(iv) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = \boxed{2(\pi-1)}.$$

(v) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to (\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$, $f(x) := \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}\arctan(x)}$ und $f^{-1}\colon (\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}) \to \mathbb{R}$ deren Umkehrfunktion. Berechnen Sie

$$(f^{-1})'(1) = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

(vi) Schreiben Sie die Dezimalzahl 0,125 als 3-adische Entwicklung:

$$0{,}125_{10} = \boxed{0{,}\overline{01}_3}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(1+\tan^2(2x))}{9(1+\tan^2(3x))} = \frac{4}{9}.$$

Mit den Regeln von l'Hospital (2-mal angewendet) folgt die Existenz des gegebenen Grenzwertes und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan(2x)}{-3\tan(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4(1+\tan^2(2x))}{9(1+\tan^2(3x))} = \frac{4}{9}.$$

(ii) Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} \quad (n\to\infty).$$

Nach Satz 4.2 hat die Potenzreihe also den Konvergenzradius e.

(iii) Definiere $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(s) := \sin(\mathrm{e}^{-s})$. Da g stetig ist, ist $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(s) := \int_0^s \sin(\mathrm{e}^{-t})\,dt$ nach dem 2. Hauptsatz eine Stammfunktion von g. Es gilt also $G'(s) = g(s) = \sin(\mathrm{e}^{-s})$. Insgesamt erhält man mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx}G(\log(x)) = G'(\log(x))\frac{1}{x} = \frac{\sin(\mathrm{e}^{-\log(x)})}{x} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}.$$

(iv) Mittels der Substitution $y = \sqrt{x}$ und partieller Integration erhält man

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2y\sin(y)\,dy = 2\left(\Big[-y\cos(y)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(y)\,dy\right)$$
$$= 2\left(\pi + \Big[\sin(y)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = 2(\pi - 1).$$

(v) f ist streng monoton wachsend. Weiter gilt $f(0) = \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}\arctan(0)} = 1$. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}\arctan(x)}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}} = \frac{\pi}{2}.$$

(vi) Der Algorithmus aus der Vorlesung zur Berechnung der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der 3-adischen Entwicklung $z_0{,}z_1z_2\dots$ von 0,125 lautet

$$z_0 = [0{,}125], \qquad z_{n+1} = [(0{,}125 - z_0 - \tfrac{z_1}{3} - \dots - \tfrac{z_n}{3^n})\cdot 3^{n+1}] \text{ für alle } n\in\mathbb{N}_0$$

und liefert

$$\begin{aligned}
z_0 &= [0{,}125] = 0,\\
z_1 &= [0{,}125\cdot 3] = [0{,}375] = 0,\\
z_2 &= [(0{,}125 - \tfrac{z_1}{3})\cdot 9] = [1{,}125] = 1,\\
z_3 &= [(0{,}125 - \tfrac{z_1}{3} - \tfrac{z_2}{9})\cdot 27] = [(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9})\cdot 27] = [0{,}375] = 0.
\end{aligned}$$

Also wiederholt sich die Ziffernfolge 01 und wir erhalten $0{,}\overline{01}_3$ als die gesuchte 3-adische Entwicklung.

Aufgabe 3:
Es seien $f, f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f_n \in R([a,b])$ $(n\in\mathbb{N})$ und $f_n \to f$ $(n\to\infty)$ punktweise.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

f ist stetig	$\Rightarrow^{1)}$	$f\in R([a,b])$	$\Leftarrow^{2)}$	f ist monoton
$\Updownarrow^{3)}$		$\Uparrow^{4)}$		$\Uparrow^{5)}$
f ist gleichmäßig stetig	k.B.$^{6)}$	$f_n\to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig		$f\in C^1([a,b])$ $(f'(x))^2>0$ $(x\in[a,b])$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1) Nach der Vorlesung sind stetige Funktionen Riemann-integrierbar. Umgekehrt ist

$$g\colon[-1,1]\to\mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 1, & \text{sonst}\end{cases}$$

Riemann-integrierbar, aber nicht stetig.

2) Nach der Vorlesung sind monotone Funktionen Riemann-integrierbar. Umgekehrt ist $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$ Riemann-integrierbar, aber nicht monoton.

3) Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt insbesondere die Stetigkeit. Außerdem sind stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall insbesondere gleichmäßig stetig.

4) Nach der Vorlesung folgt aus der Integrierbarkeit der Funktionen f_n und der gleichmäßigen Konvergenz die Integrierbarkeit der Grenzfunktion f. Umgekehrt sind alle Funktionen $g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := (nx)^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2}$ und die Grenzfunktion $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ Riemann-integrierbar, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig (siehe Aufgabe 4).

5) Aus $(f'(x))^2 \neq 0$ $(x \in [a,b])$ folgt mit dem Zwischenwertsatz $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ $(x \in [a,b])$, d.h. f ist monoton. Umgekehrt ist

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

monoton, aber nicht differenzierbar.

6) Die Nullfunktion g ist gleichmäßig stetig, aber $g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := (nx)^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen g (siehe Aufgabe 4).

Die Funktionenfolge $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch

$$h_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ h_n(x) := \begin{cases} \arctan(n\frac{x}{|x|}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

konvergiert gleichmäßig gegen

$$h\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

aber h ist nicht (gleichmäßig) stetig.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die nachstehenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jeweils punktweise konvergieren und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jeweils auch gleichmäßig?

(i) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := (nx)^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2}$.

(ii) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := nx^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) _Behauptung:_ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig.

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$f_n(x) = (nx)^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ die punktweise Grenzfunktion.

Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 := x_0(n) := \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(\tfrac{1}{n})| = (n\tfrac{1}{n})^2 \mathrm{e}^{-(n\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{\mathrm{e}} > \varepsilon.$$

Somit kann $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nicht gleichmäßig konvergieren. $\square$

(ii) <u>*Behauptung:*</u> $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

<u>*Beweis:*</u> Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-(nx)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ die punktweise Grenzfunktion.
Alle f_n sind zweimal stetig differenzierbar mit

$$f_n'(x) = 2nx\mathrm{e}^{-(nx)^2}(1 - (nx)^2) \quad \text{und} \quad f_n''(x) = 2n\mathrm{e}^{-(nx)^2}(1 + 2(nx)^4 - 5(nx)^2).$$

Somit erhalten wir die Extremstellen $x_0 = 0$ und $x_\pm = \pm\frac{1}{n}$. Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt $f_n''(x_0) > 0$, d.h f_n hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum. Ferner gilt $f_n''(\pm\frac{1}{n}) < 0$, also liegt ein lokales Maximum vor. Außerdem gilt $f_n(-\frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{n})$. Wegen $f_n(x) \to 0$ $(x \to \pm\infty)$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\frac{1}{n}) = n\tfrac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-(n\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{\mathrm{e}n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da die rechte Seite unabhängig von x gegen 0 konvergiert, konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auch gleichmäßig gegen f. $\square$

Aufgabe 5:
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\log\left(\frac{2 + \sin(x^2)}{2 + \sin(y^2)}\right)\right| \leq 2\max\{|x|\,, |y|\}\,|x - y|\,.$$

Hinweis: Mittelwertsatz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\left|\log\left(\frac{2+\sin(x^2)}{2+\sin(y^2)}\right)\right| \leq 2\max\{|x|\,, |y|\}\,|x - y|$.

<u>*Beweis:*</u> Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(2 + \sin(x^2))$ ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{2+\sin(x^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu $x, y \in \mathbb{R}$ (es sei o.B.d.A $x < y$) ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\log(2 + \sin(x^2)) - \log(2 + \sin(y^2)) = \frac{2\xi\cos(\xi^2)}{2 + \sin(\xi^2)}(x - y)$$

Anwenden von Beträgen und abschätzen (beachte $|\xi| \leq \max\{|x|, |y|\}$) liefert

$$\begin{aligned} \left|\log(2 + \sin(x^2)) - \log(2 + \sin(y^2))\right| &= \frac{2\left|\xi\cos(\xi^2)\right|}{|2 + \sin(\xi^2)|}\,|x - y| \leq \frac{2|\xi|}{1}\,|x - y| \\ &\leq 2\max\{|x|\,, |y|\}\,|x - y|\,. \end{aligned}$$

Anwenden der Logarithmengesetze liefert schließlich

$$\left|\log\left(\frac{2 + \sin(x^2)}{2 + \sin(y^2)}\right)\right| = \left|\log(2 + \sin(x^2)) - \log(2 + \sin(y^2))\right| \leq 2\max\{|x|\,, |y|\}\,|x - y|\,.$$

$\square$