Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte: $\boxed{}$

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+\sin(\pi x))}{x^2-4x+3} = \boxed{}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3-n^3}(x+1)^n \text{ konvergiert } \iff x \in \boxed{}.$$

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^{x^2} \sin\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \boxed{}.$$

(iv) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \,\mathrm{d}x = \boxed{}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} x^2+3x, & x \le 0, \\ a\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $f_a \in C(\mathbb{R})$ ist:

$$f_a \in C(\mathbb{R}) \iff a \in \boxed{}.$$

(vi) Schreiben Sie die Zahl $\frac{5}{8}$ als 3-adische Entwicklung

$$(\tfrac{5}{8})_3 = \boxed{}.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3:
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine reelle Folge und $(b_n)_{n=0}^\infty$ eine beschränke reelle Folge.

$\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ konvergiert	$\square$	$\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert	$\square$	$(a_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert
$\square$				$\square$
$\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut	$\square$	$(a_n)_{n=0}^\infty$ ist eine monotone Nullfolge	$\square$	$\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{a_n^k}{k!}\right)_{n=0}^\infty$ konvergiert

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie jeweils die gegebene Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(i) $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan(x^2 + nx)$.

(ii) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^2}$.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 5:

(i) Zeigen Sie, dass ein $x \in (0, \infty)$ existiert mit

$$\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^x = \frac{1}{2}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion f differenzierbar ist und berechnen Sie dort deren Ableitung:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x \leq 0, \\ x^x, & x > 0. \end{cases}$$

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Herbst 2022

13. September 2022

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Es gilt $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.
IA: Für $n = 2$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 2 = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2!}.$$

IV: Gelte $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \overset{\text{(IV)}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}. \square$$

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(1+\sin(\pi x))}{x^2-4x+3} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3-n^3}(x+1)^n \text{ konvergiert} \iff x \in \boxed{[-2,0]}.$$

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^{x^2}\sin\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \boxed{2x\sin(|x|)}.$$

(iv) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\log(2)}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} x^2+3x, & x \le 0, \\ a\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $f_a \in C(\mathbb{R})$ ist:

$$f_a \in C(\mathbb{R}) \iff a \in \boxed{\{0\}}.$$

(vi) Schreiben Sie die Zahl $\frac{5}{8}$ als 3-adische Entwicklung

$$(\tfrac{5}{8})_3 = \boxed{0{,}\overline{12}_3}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* Es gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+\sin(\pi x))}{x^2-4x+3} = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis: Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+\sin(\pi x))}{x^2-4x+3} \overset{\substack{\text{l'Hospital}\\ 0/0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+\sin(\pi x)}\cdot \pi\cos(\pi x)}{2x-4} = \frac{\frac{1}{1+\sin(\pi)}\cdot\pi\cos(\pi)}{2\cdot 1-4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3-n^3}(x+1)^n \text{ konvergiert } \iff x \in [-2,0]$$

Beweis: Zunächst konvergiert die Potenzreihe für $x=-1$. Für $x \neq -1$ definieren wir die Summanden $a_n := \frac{1}{n+3-n^3}(x+1)^n$ und erhalten daraus:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{n+3-n^3}{(n+1)+3-(n+1)^3}\right||x+1| = \left|\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}-1}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}-(1+\frac{1}{n})^3}\right||x+1| \to |x+1|$$

für $n\to\infty$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|x+1|<1$ und sie divergiert für $|x+1|>1$. Für die verbleibenden beiden Punkte, d.h. $x\in\{-2,0\}$, gilt

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n+3-n^3}\right| \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Die Reihe verhält sich wie $\frac{1}{n^3}$ für große n und konvergiert somit absolut: Es gilt

$$|a_n| \le \frac{8}{n^3}$$

für $n \ge 2$, woraus die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ aus dem Majorantenkriterium folgt. Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Potenzreihe genau für $x \in [-2,0]$ konvergiert. $\square$

(iii) *Behauptung:* Die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) := \int_0^{x^2} \sin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$ ist gegeben durch

$$f'(x) = 2x\sin(|x|).$$

Beweis: Es bezeichne S eine Stammfunktion der stetigen Funktion $[0,\infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(\sqrt{t})$. Dann gilt nach Definition $f(x) = S(x^2) - S(0)$ für $x \in \mathbb{R}$. Nach Kettenregel ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = S'(x^2) \cdot 2x = \sin(\sqrt{x^2}) \cdot 2x = 2x \sin(|x|). \qquad \square$$

(iv) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \log(2).$$

Beweis: Wir berechnen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = [-\log(1+\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log(2). \qquad \square$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 0, \\ a \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Behauptung: Es gilt:

$$f_a \text{ ist stetig} \iff a \in \{0\}.$$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Zunächst ist f_a auf den offenen Mengen $(-\infty, 0)$ sowie $(0, \infty)$ stetig als Komposition stetiger Funktion. Somit gilt $f_a \in C(\mathbb{R})$ genau dann, wenn f_a im Punkt 0 stetig ist. Weiter gilt

$$\lim_{x \to 0-} f_a(x) = \lim_{x \to 0-} x^2 + 3x = 0 = f(0).$$

Für $a = 0$ gilt $\lim_{x \to 0+} f_a(x) = 0$, sodass f_a für $a = 0$ in 0 stetig ist.

Für $a \neq 0$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} f_a(x)$ nicht: Um das einzusehen, betrachten wir die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$, die $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ erfüllt. Dann gilt

$$f_a(x_n) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = a(-1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$, also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} f_a(x_n)$ nicht. $\square$

(vi) *Behauptung:* Es gilt $\frac{5}{8} = 0{,}\overline{12}_3$

Beweis: Mit dem Algorithmus aus der Vorlesung ergibt sich für $a = \frac{5}{8}$ und $q = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \left[\tfrac{5}{8}\right] = 0, & a_0 &= \tfrac{5}{8} - 0 = \tfrac{5}{8}, \\ z_1 &= \left[\tfrac{5}{8} \cdot 3\right] = 1, & a_1 &= \tfrac{5}{8} \cdot 3 - 1 = \tfrac{7}{8}, \\ z_2 &= \left[\tfrac{7}{8} \cdot 3\right] = 2, & a_2 &= \tfrac{7}{8} \cdot 3 - 1 = \tfrac{5}{8}. \end{aligned}$$

Wegen $a_2 = a_0$ folgt $z_3 = z_1$, damit $a_3 = a_1$, damit $z_4 = z_2$ usw. Insgesamt ist $\frac{5}{8} = (z_0{,}z_1 z_2 z_3 \ldots)_3 = (0{,}\overline{12})_3$. $\square$

Aufgabe 3:
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text “keine Beziehung” in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine reelle Folge und $(b_n)_{n=0}^\infty$ eine beschränke reelle Folge.

$\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ konvergiert	$\boxed{\text{k.B. (a)}}$	$\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert	$\boxed{\Rightarrow \text{(b)}}$	$(a_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert
$\boxed{\Uparrow \text{(c)}}$				$\boxed{\Downarrow \text{(d)}}$
$\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut	$\boxed{\text{k.B. (e)}}$	$(a_n)_{n=0}^\infty$ ist eine monotone Nullfolge	$\boxed{\Rightarrow \text{(f)}}$	$\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{a_n^k}{k!}\right)_{n=0}^\infty$ konvergiert

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Dass $\Rightarrow$ im Allgemeinen falsch ist, sieht man am Beispiel $a_n = 1, b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Dass $\Leftarrow$ im Allgemeinen falsch ist, sieht man am Beispiel $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, b_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

(b) Zu $\Rightarrow$: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$, so ist a_n eine Nullfolge und insbesondere konvergent.
Dass die Umkehrung nicht gilt, sieht man z.B. für $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

(c) Zu $\Uparrow$: Aufgrund der Beschränktheit von (b_n) existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. So gilt $|a_n b_n| \leq C|a_n|$, sodass nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ absolut konvergiert.
Dass $\Downarrow$ im Allgemeinen falsch ist, sieht man zum Beispiel an $a_n = 1, b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

(d) Zu $\Downarrow$: Konvergiert die Folge (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch (e^{a_n}) gegen e^a.
Zu $\Uparrow$: Die Folge $(a_n) = (-n)$ konvergiert nicht, aber e^{a_n} konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0.

(e) Zu $\Rightarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Zu $\Leftarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $a_n = \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

(f) Zu $\Rightarrow$: Ist (a_n) eine monotone Nullfolge, so ist (a_n) insbesondere konvergent und damit auch (e^{a_n}).
Zu $\Leftarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie jeweils die gegebene Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(i) $f_n \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan(x^2 + nx)$.

(ii) $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{n^2 x^2}{1 + n^3 x^2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) *Behauptung:* Die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und insbesondere konvergiert $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x > 0$ konvergiert $x^2 + nx$ gegen $+\infty$ für $n \to \infty$ und damit $f_n(x)$ gegen $\lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass (f_n) punktweise gegen f konvergiert. Weiter halten wir fest, dass f in 0 unstetig ist, alle Funktionen f_n jedoch stetig sind als Komposition stetiger Funktionen. Nach Satz 8.3 aus der Vorlesung impliziert dies, dass die Konvergenz von (f_n) gegen f nicht gleichmäßig ist. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Folge f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$.

<u>*Beweis:*</u> Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^2} \leq \frac{\frac{1}{n} + n^2x^2}{1+n^3x^2} = \frac{1}{n}.$$

Da die obere Schranke $\frac{1}{n}$ nicht von x abhängt und für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f. $\square$

Aufgabe 5:

(i) Zeigen Sie, dass ein $x \in (0, \infty)$ existiert mit

$$\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^x = \frac{1}{2}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion f differenzierbar ist und berechnen Sie dort deren Ableitung:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x \leq 0, \\ x^x, & x > 0. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) <u>*Behauptung:*</u> Es existiert eine Lösung $x \in (0, \infty)$ von

$$\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^x = \frac{1}{2}.$$

<u>*Beweis:*</u> Wir definieren $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^x$. Dann gelten

$$f(1) = \cos(\frac{1}{\mathrm{e}}) + \mathrm{e} > -1 + 2 = 1 > \frac{1}{2}$$

Wir definieren die Nullfolge (x_n) durch

$$x_n \coloneqq \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \in (0,1)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$f(x_n) = \cos((2n+1)\pi) + \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$$

und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$. Somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x_N) < \frac{1}{2}$. Da f auf $(0,\infty)$ stetig ist als Komposition stetiger Funktionen, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [x_N, 1] \subseteq (0,\infty)$ mit $f(x) = \frac{1}{2}$. Wegen $x \in (0,\infty)$ zeigt dies die Behauptung. $\square$

(b) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion f ist genau in $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ differenzierbar. Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0, \\ x^x(1+\log(x)), & x > 0. \end{cases}$$

<u>*Beweis:*</u> Zunächst ist f auf den offenen Mengen $(-\infty, 0)$ sowie auf $(0,\infty)$ differenzierbar als Komposition differenzierbar. Mittels Ketten- und Produktregel lässt sich auf diesen Mengen die Ableitung bestimmen. Es gilt

$$f'(x) = \mathrm{e}^x$$

für $x \in (-\infty, 0)$ sowie

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x\log(x)}\right)' = \mathrm{e}^{x\log(x)} \cdot \left(\log(x) + \frac{x}{x}\right) = x^x(1+\log(x)).$$

für $x \in (0,\infty)$. Zuletzt ist f nicht differenzierbar in 0. Angenommen, f ist differenzierbar in 0. Dann ist f stetig in 0 und es gilt

$$f'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ 0/0}}{=} \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^x}_{\substack{\to 1\ (x\to 0+) \\ \text{da } f \text{ stetig in } 0}} \big(1 + \underbrace{\log(x)}_{\to -\infty\ (x\to 0+)}\big) = -\infty.$$

Per Annahme ist f differenzierbar in 0, weshalb $f'(0) \in \mathbb{R}$ gelten muss. Wir erhalten einen Widerspruch und die Annahme muss falsch gewesen sein. $\square$

Anmerkung: Die Identität $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$ im obigen Beweis kann man auch anders erhalten. Zum Beispiel kann man hier auf die Vorlesung (Beispiel unter 9.11 auf Seite 87 des HM1 Skriptes) verweisen oder diese direkt zeigen:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} E(x\log(x)) = E\left(\lim_{x\to 0+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\substack{\text{l'Hospital} \\ 0/0}}{=} E\left(\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = E(0) = 1,$$

wobei E die Exponentialfunktion bezeichnet.