Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

11.03.2020

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(1-2k)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(1-2k)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.

IA: Für $n=1$ gilt $\sum_{k=1}^{1}(1-2k)^2 = (-1)^2 = 1 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(3\cdot 1^2-1)$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n}(1-2k)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(1-2k)^2 &= (1-2(n+1))^2 + \sum_{k=1}^{n}(1-2k)^2 \underset{\mathrm{IV}}{=} (1-2(n+1))^2 + \frac{1}{3}n(4n^2-1)\\
&= \frac{1}{3}\left(3-12(n+1)+12(n+1)^2+n(4n^2-1)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(3-12n-12+12n^2+24n+12+4n^3-n\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(4n^3+12n^2+11n+3\right) = \frac{1}{3}\left(4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3\right)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+4-1) = \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1).
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+2x}{(1+x)^m+x^2-1} = \boxed{\frac{1}{m}}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x+1)^n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow x \in \boxed{(-4,2)}.$$

(iii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}}.$$

(iv) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 x \log(x)\, dx = \boxed{2\log(2) - \frac{3}{4}}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_a(x) := \begin{cases} \sin(x), & x \le \frac{\pi}{2}, \\ x^2 + a, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist:

$$f_a \text{ ist stetig } \Leftrightarrow\ a \in \boxed{\left\{1 - \frac{\pi^2}{4}\right\}}.$$

(vi) Schreiben Sie die folgende 3-adische Entwicklung als Dezimalzahl:

$$0{,}\overline{12}_3 = \boxed{\frac{5}{8} = 0{,}625}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1-x} + 2}{m(1+x)^{m-1} + 2x} = \frac{1}{m}.$$

Mit den Regeln von l'Hospital folgt die Existenz des gegebenen Grenzwertes und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x) + 2x}{(1+x)^m + x^2 - 1} = \frac{1}{m}.$$

(ii) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{3^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nach dem Wurzelkriterium beträgt der Konvergenzradius somit 3, d.h. die Reihe konvergiert für $x \in (-4,2)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus [-4,2]$. Es bleiben noch die Randpunkte $x \in \{-4,2\}$ zu untersuchen. Hier lauten die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} 3^n = \sum_{k=1}^{\infty} n, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(-3)^n = \sum_{k=1}^{\infty} n(-1)^n.$$

Da beide Reihen divergieren ($((n)_{n=1}^{\infty}$ und $(n(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ sind keine Nullfolgen), konvergiert die gegebene Reihe also genau dann, wenn $x \in (-4,2)$ gilt.

(iii) Definiere $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(s) := \mathrm{e}^{-s^2}$. Da g stetig ist, ist $G\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $G(s) := \int_0^s \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ nach dem 2. Hauptsatz eine Stammfunktion von g. Es gilt also $G'(s) = g(s) = \mathrm{e}^{-s^2}$. Insgesamt erhält man mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx} G(\sqrt{x}) = G'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}},$$

(iv) Mittels partieller Integration erhält man

$$\int_1^2 x\log(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\log(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2\log(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = 2\log(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2\log(2) - \frac{3}{4}.$$

(v) f_a ist stetig genau dann stetig, wenn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} f_a(x)$, also genau dann, wenn $1 = \sin(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 + a$ und somit genau dann, wenn $a = 1 - \frac{\pi^2}{4}$.

(vi) Mit der geometrischen Reihe erhält man:

$$0{,}\overline{12}_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{2k}} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}} = 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$$
$$= 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9^k} = 5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = 5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\right) = 5\left(\frac{9}{8} - 1\right) = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Aufgabe 3:
Es seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Nullfolge.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

$(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert	k.B.[1)]	Es existiert ein $c>0$ mit $a_n \geq c$ $(n\in\mathbb{N})$	$\Rightarrow$[2)]	$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert
$\Uparrow$[3)]		k.B.[4)]		
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend	$\Rightarrow$[5)]	$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert	$\Rightarrow$[6)]	$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1) Für $a_n := n^2$ und $b_n := \frac{1}{n}$ ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nach unten durch $1 > 0$ beschränkt, aber $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$ ist divergent. Für $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n}$ ist $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber da $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, existiert kein $c > 0$ mit $a_n < c$ $(n \in \mathbb{N})$.

2) Existiert ein $c > 0$ mit $a_n \geq c$ $(n \in \mathbb{N})$, so erhält man $0 \leq |\frac{b_n}{a_n}| \leq \frac{|b_n|}{c}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (gegen 0) nach Satz 2.2. Für $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n}$ ist $(\frac{b_n}{a_n})_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber da $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, existiert kein $c > 0$ mit $a_n < c$ $(n \in \mathbb{N})$.

3) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend, so ist $(a_n)_{n=1}$ nach oben beschränkt und somit beschränkt. Nach einer Übungsaufgabe ist dann $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent. Für $a_n := 1 + (-1)^n$ und $b_n := \frac{1}{n}$ ist $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1+(-1)^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht monoton fallend.

4) Für $a_n := n$ ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nach unten durch $1 > 0$ beschränkt, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$ ist divergent. Für $a_n := \frac{1}{n}$ ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber da $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, existiert kein $c > 0$ mit $a_n < c$ $(n \in \mathbb{N})$.

5) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ monoton fallend (beachte: $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist nach unten beschränkt), so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach dem Monotoniekriterium konvergent. Für $a_n := \frac{2+(-1)^n}{n}$ ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, aber $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist nicht monoton fallend.

6) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, so konvergiert auch $(\frac{a_n}{1+a_n})_{n=1}^\infty$ und somit gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$. Umgekehrt ist $(a_n) := (n)$ nicht konvergent, aber $\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{n}{1+n}$ konvergiert gegen 1.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die nachstehenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^\infty$ jeweils punktweise konvergieren und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n=1}^\infty$ jeweils auch gleichmäßig?

(i) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{(nx)^3}{1+(nx)^4}$.

(ii) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{(nx)^3 x}{1+(nx)^4}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig.

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$f_n(x) = \frac{\frac{x^3}{n}}{\frac{1}{n^4} + x^4} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ die punktweise Grenzfunktion.
Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 := x_0(n) := \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(\tfrac{1}{n})| = \frac{n^3 \frac{1}{n^3}}{1 + n^4 \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Somit kann $(f_n)_{n=1}^\infty$ nicht gleichmäßig konvergieren. □

(ii) *Behauptung:* $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$f_n(x) = \frac{\frac{x^4}{n}}{\frac{1}{n^4} + x^4} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ die punktweise Grenzfunktion.
Für $x = 0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $x \neq 0$ erhält man

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n^3 x^4}{1+(nx)^4} \right| = \frac{n^3 x^4}{1+(nx)^4} \leq \frac{n^3 x^4}{(nx)^4} = \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt also $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und somit konvergiert $(f_n)_{n=1}^\infty$ auch gleichmäßig gegen f. □

Aufgabe 5:
Es sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x^2)\arctan(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $\pi + 1$.

(ii) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

(iii) Es sei $f^{-1}\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) *Behauptung:* f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\pi + 1$.

Beweis: f ist nach der Produktregel differenzierbar mit $f'(x) = 2x\arctan(x)+1$ für alle $x \in (-1,1)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert somit zu $x, y \in [-1,1]$ mit $x < y$ ein $\xi \in (x,y)$ mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$. Wegen $|\xi| \le 1$ und $|\arctan(\xi)| \le \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$|f'(\xi)| = |2\xi\arctan(\xi) + 1| \le 2|\xi||\arctan(\xi)| + 1 \le \pi + 1.$$

Somit gilt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le (\pi+1)|x-y|,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\pi + 1$. $\square$

(ii) *Behauptung:* f ist streng monoton wachsend.

Beweis: Wie bereits in Teil (i) festgestellt ist f differenzierbar. Außerdem gilt

$$f(x) = 2x\arctan(x) + 1 \ge 1 > 0,$$

d.h. f ist streng monoton wachsend. $\square$

(iii) Es gilt $(f^{-1})'(0) = 1$.

Beweis: Zunächst gilt $f(0) = 0$ und somit gilt nach der Vorlesung $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$. $\square$