Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k! \cdot k = 1! \cdot 1 = 1 = 2! - 1$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k! \cdot k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k\right) + (n+1)! \cdot (n+1) \underset{\text{IV}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)! \cdot (n+1) \\ &= (n+1)! \cdot (1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{\sin(4x)} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1}(x+3)^n$:

$$r = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,dt$. Bestimmen Sie die Ableitung

$$f'(x) = \boxed{\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{x}}}.$$

(iv) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\log(\pi)}^{\log(2\pi)} \cos(e^x)e^{2x}\,dx = \boxed{2}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_a(x) := \begin{cases} 4\mathrm{e}^{-(ax)^2}, & x \leq 1, \\ 3x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist:

$$f_a \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \boxed{\left\{-\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}\right\}}.$$

(vi) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_n := a_{n-1} + (\frac{1}{3})^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2(x)}{4\cos(4x)} = -\frac{1}{2}.$$

Mit den Regeln von l'Hospital folgt die Existenz des gegebenen Grenzwertes und es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\sin(4x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2(x))}{4\cos(4x)} = -\frac{1}{2}.$$

(ii) Mit $a_n := \frac{2^{n-1}}{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^{n-1}(2(n+1)-1)}{2^n(2n-1)} = \frac{2n+1}{4n-2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

Nach Satz 4.2 hat die Potenzreihe also den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.

(iii) Definiere $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(s) := \log(1+s^2)$. Da g stetig ist, ist $G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(s) := \int_0^s \log(1+t^2)\,dt$ nach dem 2. Hauptsatz eine Stammfunktion von g. Es gilt also $G'(s) = g(s) = \log(1+s^2)$. Insgesamt erhält man mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx} G(\sqrt{x}) = G'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\log(1+x)}{2\sqrt{x}}.$$

(iv) Mittels der Substitution $y = \mathrm{e}^x$ und partieller Integration erhält man

$$\int_{\log(\pi)}^{\log(2\pi)} \cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} y\cos(y)\,dy = \Big[y\sin(y)\Big]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(y)\,dy = 0 - \Big[-\cos(y)\Big]_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

(v) f_a ist stetig genau dann stetig, wenn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} f_a(x)$, also genau dann, wenn $4\mathrm{e}^{-a^2} = 2$ und somit genau dann, wenn $a^2 = \log(2)$, also genau dann, wenn $|a| = \sqrt{\log(2)}$.

(vi) Man erkennt, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^k$ ist. Somit erhält man den gesuchten Grenzwert direkt über den Reihenwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 3:
Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge.

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$	$\Leftarrow$ 1)	$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt		$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 + a_{n+1}^2 = 0$
k.B. 2)		$\Uparrow$ 3)		$\Downarrow$ 4)
$H(a_n)$ enthält genau ein Element	$\Leftarrow$ 5)	$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist konvergent	$\Rightarrow$ 6)	$(a_n a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ ist konvergent

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt durch eine Konstante $C \geq 0$, so gilt $0 \leq \frac{|a_n|}{n^2} \leq \frac{C}{n^2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert $(\frac{a_n}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ gegen 0. Ist umgekehrt $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ so konvergiert $(\frac{a_n}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ gegen 0, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist unbeschränkt.

2) Für $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert $(\frac{a_n}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ gegen 0, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hat keinen Häufungswert. Umgekehrt hat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n := (-1)^n$ zwei Häufungswerte, aber $(\frac{a_n}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen 0 da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist (siehe 1)).

3) Nach der Vorlesung sind konvergente Folge beschränkt. Umgekehrt ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n := (-1)^n$ beschränkt, aber nicht konvergent.

4) Konvergiert $a_n^2 + a_{n+1}^2$ gegen 0, so ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (und auch $(a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$) eine Nullfolge. Somit konvergiert $(a_n a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ nach den Grenzwertsätzen (gegen 0). Umgegkehrt ist für $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Folge $(a_n a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 + a_{n+1}^2 = 1$.

5) Nach Vorlesung besitzt eine konvergente Folge genau einen Häufungswert. Umgekehrt besitzt die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ n, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

nur den Häufungswert 1, ist aber nicht konvergent.

6) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent, so konvergiert auch $(a_n a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ nach den Grenzwertsätzen. Umgekehrt ist für $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Folge $(a_n a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ konvergent, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ selbst ist nicht konvergent.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ definiert durch

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{\sin(\frac{\pi}{2}nx)}{1+(nx)^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ punktweise konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n=1}^\infty$ auch gleichmäßig?

(ii) Untersuchen Sie nun die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty g_n(x)$ mit

$$g_n\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ g_n(x) := f_n(x)$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig.

Beweis: Für $x=0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$0 \leq |f_n(x)| = \frac{|\sin(\frac{\pi}{2}nx)|}{1+(nx)^2} \leq \frac{1}{(nx)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ die punktweise Grenzfunktion.
Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 := x_0(n) := \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(\tfrac{1}{n})| = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n\frac{1}{n})}{1+(n\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Somit kann $(f_n)_{n=1}^\infty$ nicht gleichmäßig konvergieren. □

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty g_n(x)$ konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise).

Beweis: Da alle g_n auf dem Intervall $[1,\infty)$ definiert sind, erhält man

$$|g_n(x)| = \frac{|\sin(\frac{\pi}{2}nx)|}{1+(nx)^2} \leq \frac{1}{(nx)^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in [1,\infty)).$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach dem Kriterium von Weierstraß (Satz 8.1) die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty g_n(x)$ und somit auch die punktweise Konvergenz. □

Aufgabe 5:
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(\pi + \arctan(x))$.

(i) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $\frac{2}{\pi}$.

(ii) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

(iii) Es sei $f^{-1}\colon (\log(\frac{\pi}{2}), \log(\frac{3\pi}{2})) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie $(f^{-1})'(\log(\pi))$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) Behauptung: f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\frac{2}{\pi}$.

Beweis: f ist nach der Kettenregel differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{\pi+\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz existiert somit zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit o.B.d.A. $x < y$ ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Ferner gilt $\frac{\pi}{2} < \pi + \arctan(\xi) < \frac{3\pi}{2}$ und $0 < \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$. Somit erhält man

$$0 = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} \cdot 0 < f'(\xi) = \frac{1}{\pi + \arctan(\xi)} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 = \frac{2}{\pi},$$

also $|f'(\xi)| \leq \frac{2}{\pi}$. Somit gilt (auch für $x = y$)

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \frac{2}{\pi}|x - y|,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\frac{2}{\pi}$. $\square$

(ii) Behauptung: f ist streng monoton wachsend.

Beweis: Wie bereits in Teil (i) festgestellt, ist f differenzierbar mit $f'(x) > 0$, d.h. f ist streng monoton wachsend. $\square$

(iii) Es gilt $(f^{-1})'(\log(\pi)) = \pi$.

Beweis: Zunächst gilt $f(0) = \log(\pi)$ und somit gilt nach der Vorlesung

$$(f^{-1})'(\log(\pi)) = \frac{1}{f'(0)} = \left(\frac{1}{\pi + \arctan(0)} \cdot \frac{1}{1+0^2} \right)^{-1} = \pi.$$

$\square$