Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

17.03.2022

Aufgabe 1:
Es sei $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(rk-1) = \frac{n(n+1)}{6}((2n+1)r-3).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k(rk-1) = \frac{n(n+1)}{6}((2n+1)r-3)$.

Beweis: Es sei $r \in \mathbb{R}$. Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k(rk-1) = r-1 = \frac{2}{6}(2+1)r-3)$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $\sum_{k=1}^{n} k(rk-1) = \frac{n(n+1)}{6}((2n+1)r-3)$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(rk-1) &= \sum_{k=1}^{n} k(rk-1) + (n+1)(r(n+1)-1) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{6}((2n+1)r-3) + (n+1)(r(n+1)-1) \\
&= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)r + 6(n+1)r - 3n - 6\right] \\
&= \frac{n+1}{6}\left[(n+2)(2n+3)r - 3(n+2)\right] \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{6}((2(n+1)+1)r-3).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3(1-x)x^2}{\sin(\log(x))} = \boxed{-3}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3n+1}}(x-3)^n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow x \in \boxed{(2,4]}.$$

(iii) Es sei $f\colon [0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_0^{\sin(x)} \frac{2}{t^2-1}\,dt$. Bestimmen Sie die Ableitung von f:

$$f'(x) = \boxed{-\frac{2}{\cos(x)}}.$$

(iv) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}\,dx = \boxed{2\log(2)}.$$

(v) Es sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \arctan(-\cos(x))$. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt 0:

$$(f^{-1})'(0) = \boxed{1}.$$

(vi) Schreiben Sie folgende binäre Zahl als 8-adische Entwicklung:

$$0{,}0111_2 = \boxed{0{,}34_8}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-3x^2 + 6(1-x)x}{\cos(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}} = -3.$$

Mit den Regeln von de L'Hospital folgt die Existenz des gegebenen Grenzwertes und es gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{3(1-x)x^2}{\sin(\log(x))} = -3.$$

(ii) Setze $a_n := \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{4n}} \leq \sqrt[n]{|(-1)^n a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[2n]{3n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n a_n (x-3)^n$ hat somit den Konvergenzradius 1 und konvergiert daher für $x \in (2,4)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-3| > 1$. Zu prüfen sind noch die Randpunkte: Für $x = 2$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ zu untersuchen. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, nach dem Minorantenkriterium divergiert daher auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Für $x = 4$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{\sqrt{3n+1}})$ eine monoton fallende Nullfolge ist.
Somit konvergiert die gegebene Potenzreihe also genau dann, wenn $x \in (2,4]$.

(iii) Definiere $g\colon [0,\frac{\sqrt{2}}{2}] \to \mathbb{R},\ g(s) := \frac{2}{s^2-1}$. Da g stetig ist, ist $G\colon [0,\frac{\sqrt{2}}{2}] \to \mathbb{R}, G(s) := \int_0^s g(t)\,dt$ nach dem 2. Hauptsatz eine Stammfunktion von g. Es gilt also $G'(s) = g(s) = \frac{2}{s^2-1}$ $(s \in [0,\frac{\sqrt{2}}{2}])$. Insgesamt erhält man mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx}G(\sin(x)) = G'(\sin(x))\cos(x) = \frac{2}{\sin^2(x)-1}\cdot\cos(x) = -\frac{2}{\cos(x)} \quad \left(x \in \left[0,\tfrac{\pi}{4}\right]\right).$$

(iv) Mit Partialbruchzerlegung gilt:

$$\frac{3}{3x-x^2} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x} \quad (x \in [1,2]).$$

Damit folgt:

$$\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}\,dx = [-\log(3-x) + \log(x)]_1^2 = \log(2) + \log(2) = 2\log(2).$$

(v) Die Funktion f ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit $f'(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ $(x \in [0,\pi])$. Weiter gilt $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = 1.$$

(vi) Es gilt $0{,}0111_2 = \frac{7}{16} = 0{,}4375$. Mit dem Algorithmus aus der Vorlesung ergibt sich für $a = 0{,}4375$ und $q = 8$:

$$\begin{aligned} z_0 &= [0,4375] = 0, & a_0 &= 0,4375 - 0 = 0,4375,\\ z_1 &= [\tfrac{7}{16}\cdot 8] = [\tfrac{7}{2}] = 3, & a_1 &= \tfrac{7}{2} - 3 = \tfrac{1}{2},\\ z_2 &= [\tfrac{1}{2}\cdot 8] = [4] = 4, & a_2 &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

und $z_n = 0$ für alle $n \geq 3$. Somit ergibt sich die 8-adische Entwicklung $0{,}4375 = 0{,}34_8$.

Aufgabe 3:

Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $I = [a,b]$, $a < b$, ein kompaktes Intervall. Weiter seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig und $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrierbar.

f ist stetig.		$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$	k.B.$^{1)}$	(f_n) konvergiert punktweise gegen f.
$\Updownarrow^{2)}$		$\Uparrow^{3)}$		$\Uparrow^{4)}$
f ist gleichmäßig stetig.	$\Leftarrow^{5)}$	(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f.	$\Leftrightarrow^{6)}$	$\sup\limits_{x\in I} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ seien die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert wie auf S. 103 des Vorlesungsskripts („Hütchenfunktionen"). Es gilt, dass (f_n) punktweise gegen $f(x) = 0$ $(x \in [0,1])$ konvergiert. Aber andererseits gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Umgekehrt definiere $f_n, f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f(x) := 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

aber (f_n) konvergiert nicht punktweise gegen f.

2) Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Stetigkeit.
Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig.

3) Da alle (f_n) stetig und somit insbesondere integrierbar über I sind und (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(vgl. Satz 10.8).
Definiere $f_n, f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f(x) := 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

aber (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig (auch nicht punktweise) gegen f.

4) Aus der Konvergenz dieses Supremums folgt insbesondere punktweise Konvergenz. Umgekehrt definiere $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ gilt wegen $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$ und $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

5) Da alle f_n stetig sind und die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, ist auch f stetig (vgl. Satz 8.3). Da I kompakt ist, ist f somit gleichmäßig stetig.
Die Umkehrung gilt nicht, da f in keiner Beziehung zur Folge (f_n) steht.

6) Dies ist eine äquivalente Characterisierung von gleichmäßiger Konvergenz.

Aufgabe 4:

(i) Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an:

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{\arctan(n^2 x)}{2 + n^2 x} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Es sei die Funktionenfolge $f_n\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx$$

existiert und geben Sie diesen gegebenenfalls an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* (f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig, gegen die Funktion $f(x) = 0$ $(x \in [0,\infty))$.

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$ und für $x > 0$ gilt $|f_n(x)| = \left|\frac{\arctan(n^2 x)}{2+n^2 x}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{2+n^2 x} \to 0$ $(n \to \infty)$. Folglich konvergiert (f_n) punktweise gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$ $(x \in [0,\infty))$.
Setze $\varepsilon := \frac{\pi}{24}$ und wähle $x_n := \frac{1}{n^2} \in [0,\infty)$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| = \frac{\arctan(1)}{2+1} = \frac{\pi}{12} > \varepsilon,$$

die Konvergenz kann somit nicht gleichmäßig sein. $\square$

(ii) _Behauptung:_ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \frac{7}{3}$.

Beweis: Für alle $x \in [1,2]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = x^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)}{\frac{x^2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} x^2,$$

da $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$. Somit konvergiert (f_n) punktweise gegen $f(x) := x^2$ $(x \in [1,2])$. Die Konvergenz ist auch gleichmäßig, denn: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$ gilt: $\left|\frac{\sin(y)}{y} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 > \frac{4}{\delta}$. Dann gilt für alle $N \geq N_0$ und alle $x \in [1,2]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^2 \left|\frac{\sin(\frac{x^2}{N})}{\frac{x^2}{N}} - 1\right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Somit folgt (nach Satz 10.8):

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}.$$

□

Aufgabe 5:

(i) Zeigen Sie, dass für $x, y \in [-2,2]$ gilt:

$$\left|\log\left(\frac{x^2-2x+2}{y^2-2y+2}\right)\right| \leq 6\,|x-y|\,.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie dort deren Ableitung:

$$f(x) := \begin{cases} \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) _Behauptung:_ Für $x, y \in [-2,2]$ gilt $\left|\log\left(\frac{x^2-2x+2}{y^2-2y+2}\right)\right| \leq 6\,|x-y|$.

Beweis: Definiere die Funktion $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(x^2-2x+2)$. f ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$. Es seien nun $x, y \in [-2,2]$, ohne Einschränkung sei $x > y$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).$$

Wegen $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1$ folgt mit den Logarithmengesetzen

$$\begin{aligned}\left|\log\left(\frac{x^2-2x+2}{y^2-2y+2}\right)\right| &= \left|\log(x^2-2x+2) - \log(y^2-2y+2)\right| = |f'(\xi)|\,|x-y| \\ &\leq |2(\xi-1)|\,|x-y| \leq 6\,|x-y|\,.\end{aligned}$$

□

(ii) _Behauptung:_ f ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\cos^2(x) - \sin(x)\right)\mathrm{e}^{\sin(x)}, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Beweis: Für $x > 0$ ist $f(x) = 1$. Daher ist f differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit $f'(x) = 0$ $(x \in (0, \infty))$. Auf $(-\infty, 0)$ ist f nach der Produkt- und Kettenregel differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \big(\cos^2(x) - \sin(x)\big)\, \mathrm{e}^{\sin(x)} \quad (x \in (-\infty, 0)).$$

Im Punkt $x = 0$ gilt für $h < 0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\cos(h)\mathrm{e}^{\sin(h)} - 1}{h}.$$

Es gilt $\lim\limits_{h \to 0-} \frac{\left(\cos^2(h) - \sin(h)\right)\mathrm{e}^{\sin(h)}}{1} = 1$ und nach den Regeln von de l'Hospital gilt daher auch

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$

Andererseits gilt für $h > 0$:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Daher ist f im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar, woraus die Behauptung folgt. □