Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch

$$a_0 \coloneqq 2, \qquad a_{n+1} \coloneqq \frac{4a_n - 3}{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie: $1 < a_n < 3$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \log(\mathrm{e}+x)}{\tan(x)} = \boxed{}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-3}}{n^2-3}(x-2)^n$:

$$r = \boxed{}.$$

(iii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \int_1^{\arctan(x)} \left(\frac{1}{\tan(t)}\right) \mathrm{d}t$. Bestimmen Sie die Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{} \text{ für alle } x \in (0,\infty).$$

(iv) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, f_a(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + a - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}, \\ 2, & x = 1, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $f_a \in C(\mathbb{R})$ ist:

$$f_a \in C(\mathbb{R}) \iff a \in \boxed{}.$$

(vi) Schreiben Sie die folgende Dezimalzahl als 5-adische Entwicklung:

$$0{,}296 = \boxed{}.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3:
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f ist Lipschitz-stetig	$\square$	f ist gleichmäßig stetig	$\square$	f ist integrierbar
$\square$		$\square$		$\square$
f ist stetig differenzierbar		f ist stetig	$\square$	f ist monoton

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 4:

(i) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ mit

$$g_n\colon (-\infty, -2] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \cos(nx^2)n^x$$

auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 5:

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \arctan(x)$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $1 + \frac{\pi}{2}$.

(ii) Es sei $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $c \in [0,1]$ existiert, sodass gilt:

$$\int_0^c g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2022

21. März 2023

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ sei definiert durch

$$a_0 := 2, \qquad a_{n+1} := \frac{4a_n - 3}{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie: $1 < a_n < 3$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* Es gilt $1 < a_n < 3$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

IA: Für $n = 0$ ist $1 < a_0 = 2 < 3$.

IV: Es gelte $a_n \in (1, 3)$ für festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gelten

$$a_{n+1} > 1 \iff \frac{4a_n - 3}{a_n} > 1 \overset{a_n>0}{\iff} 4a_n - 3 > a_n \iff a_n > 1$$

sowie

$$a_{n+1} < 3 \iff \frac{4a_n - 3}{a_n} < 3 \overset{a_n>0}{\iff} 4a_n - 3 < 3a_n \iff a_n < 3,$$

also gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung auch $1 < a_{n+1} < 3$. □

(ii) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ ist monoton steigend und konvergiert gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Beweis: Zunächst zeigen wir die behauptete Monotonie. Dazu sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir berechnen

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4a_n - 3}{a_n} - a_n = \frac{4a_n - 3 - a_n^2}{a_n} = \frac{(a_n - 1)(3 - a_n)}{a_n} > 0,$$

wobei wir $0 < 1 < a_n < 3$ verwendet haben. Also ist (a_n) monoton steigend; sogar strikt monoton steigend. Nach Teil (i) ist (a_n) zudem beschränkt, sodass (a_n) nach dem Monotoniekriterium konvergiert. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wir haben

$$0 = a - a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - 1)(3 - a_n)}{a_n} = \frac{(a - 1)(3 - a)}{a}$$

also $a \in \{1, 3\}$. Da (a_n) wächst, gilt weiter $a \geq a_0 = 2$, also ist $a = 3$. □

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \log(\mathrm{e}+x)}{\tan(x)} = \boxed{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-3}}{n^2-3}(x-2)^n$:

$$r = \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

(iii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \displaystyle\int_1^{\arctan(x)} \left(\frac{1}{\tan(t)}\right) \mathrm{d}t$. Bestimmen Sie die Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{x(1+x^2)}} \text{ für alle } x \in (0,\infty).$$

(iv) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-2}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + a - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}, \\ 2, & x = 1, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $f_a \in C(\mathbb{R})$ ist:

$$f_a \in C(\mathbb{R}) \iff a \in \boxed{\{7\}}.$$

(vi) Schreiben Sie die folgende Dezimalzahl als 5-adische Entwicklung:

$$0{,}296 = \boxed{0{,}122_5}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \log(\mathrm{e}+x)}{\tan(x)} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

<u>*Beweis:*</u> Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \log(\mathrm{e}+x)}{\tan(x)} \overset{\substack{\text{l'Hospital}\\ 0/0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}+x}}{\cos(x)^{-2}} = \frac{\mathrm{e}^0 - \frac{1}{\mathrm{e}}}{1^{-2}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}. \qquad \square$$

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-3}}{n^2-3}(x-2)^n$ hat Konvergenzradius $r = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

<u>*Beweis:*</u> Sei $a_n \coloneqq \frac{\mathrm{e}^{n-3}}{n^2-3}$ für $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ist gegeben durch $r = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$. Wir berechnen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\mathrm{e}\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-3}}}{\sqrt[n]{|n^2-3|}}.$$

Nun konvergiert $\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-3}} \to 1$ für $n \to \infty$. Weiter gelten

$$1 \le \sqrt[n]{|n^2-3|} \le \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$

für $n \ge 2$. Da nach Vorlesung $\sqrt[n]{n} \to 1$ konvergiert für $n \to \infty$, konvergiert nach dem Sandwichkriterium $\sqrt[n]{|n^2-3|} \to 1$ für $n \to \infty$. Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e},$$

und damit $r = \frac{1}{\mathrm{e}}$. $\square$

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq \displaystyle\int_1^{\arctan(x)} \left(\frac{1}{\tan(t)}\right) \mathrm{d}t$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

<u>*Beweis:*</u> Es bezeichne G eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$. Dann gilt $f(x) = G(\arctan(x)) - G(1)$. Nach Kettenregel ist f differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} \arctan'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

(iv) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

<u>*Beweis:*</u> Wir berechnen

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{PI}}{=} [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi} = -2. \qquad \square$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + a - 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}, \\ 2, & x = 1, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

<u>*Behauptung:*</u> Es gilt:

$$f_a \text{ ist stetig} \iff a \in \{7\}$$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Zunächst ist f_a auf der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Zudem existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 1} f_a(x) = \lim_{x \to 1} 3x^2 - ax + a - 1 = 2$$

und

$$\lim_{x \to 2} f_a(x) = \lim_{x \to 2} 3x^2 - ax + a - 1 = 11 - a$$

Also ist f_a genau dann stetig, wenn $f_a(1) = 2$ und $f_a(2) = 11 - a$ gelten; dies ist genau für $a = 7$ der Fall. □

(vi) *Behauptung:* Es gilt $0{,}296 = 0{,}122_5$.

Beweis: Wir berechnen $0,296 = 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}122_5$. □

Aufgabe 3:
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f ist Lipschitz-stetig	$\Rightarrow$ (a)	f ist gleichmäßig stetig	$\Rightarrow$ (b)	f ist integrierbar
$\Uparrow$ (c)		$\Updownarrow$ (d)		$\Uparrow$ (e)
f ist stetig differenzierbar		f ist stetig	k.B. (f)	f ist monoton

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Zu $\Rightarrow$: Ist aus Vorlesung (S.71 im HM1 Skript) bekannt.
Zu $\Leftarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Zu $\Rightarrow$: Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig und stetige Funktionen sind gemäß Vorlesung, Satz 10.5 integrierbar.
Zu $\Leftarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$.

(c) Zu $\Uparrow$: Die Ableitung f' ist stetig, somit beschränkt: $|f'(x)| \leq M$ für $x \in [0, 1]$. Nach dem Mittelwertsatz ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante M.
Zu $\Downarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

(d) Zu $\Uparrow$: Satz von Heine (Satz 7.16 im Skript).
Zu $\Downarrow$: Ist aus Vorlesung (S.71 im HM1 Skript) bekannt.

(e) Zu $\Uparrow$: Monotone Funktionen sind nach Vorlesung (Satz 10.4 im Skript) integrierbar.
Zu $\Downarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

(f) Zu $\Rightarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
Zu $\Leftarrow$: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 0$.

Aufgabe 4:

(i) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ mit

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty g_n$ mit

$$g_n\colon (-\infty, -2] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \cos(nx^2)n^x$$

auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* Die Funktionenfolge konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1$.

Beweis: Mit dem Sinus cardinalis aus der Übung

$$\mathrm{si}(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

können wir vereinfacht $f_n(x) = \mathrm{si}(\frac{x}{n})$ schreiben.
Zuerst diskutieren wir punktweise Konvergenz. Dazu sei $x \in \mathbb{R}$. Da si stetig ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{si}\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{si}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}\right) = \mathrm{si}(0) = 1,$$

d.h. f_n konvergiert punktweise gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1$.
Nun betrachten wir gleichmäßige Konvergenz: f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f. Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(n\pi) - f(n\pi)| = |\mathrm{si}(\pi) - 1| = 1,$$

und die rechte Seite konvergiert nicht gegen 0 für $n \to \infty$. □

(ii) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty g_n$ konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise).

Beweis: Wir verwenden das Kriterium von Weierstraß. Dazu schätzen wir ab:

$$|g_n(x)| = \left|\cos(nx^2)n^x\right| \leq n^x \leq n^{-2}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x \leq -2$. Nun konvergiert $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$, sodass nach dem Kriterium von Weierstraß die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty g_n$ gleichmäßig konvergiert. □

Aufgabe 5:

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \arctan(x)$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $1 + \frac{\pi}{2}$.

(ii) Es sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Zeigen Sie, dass ein $c \in [0,1]$ existiert, sodass gilt:

$$\int_0^c g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) *Behauptung:* Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \arctan(x)$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $1 + \frac{\pi}{2}$.

Beweis: Zunächst ist f differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen, und die Ableitung f' ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \arctan(x) + \sqrt{1+x^2}\frac{1}{1+x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$|f'(x)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

gilt. Daraus folgt $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y-x| \leq (1 + \frac{\pi}{2})|y-x|$, was zu zeigen war. □

(ii) *Behauptung:* Es existiert ein $c \in [0,1]$, sodass $\int_0^c g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ gilt.

Beweis: Wir definieren

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in [0,1]$. Dann ist G stetig nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Weiter gelten $G(0) = \int_0^0 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ und $G(1) = 1$ nach Voraussetzung. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in [0,1]$, sodass $G(c) = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. □