Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

11.03.2020

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'''(x) + 4y'(x) = 3\cos(x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -4.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems lautet $y(x) = \sin(x) - 1 + \cos(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Beweis: Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung lautet $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2\mathrm{i})(\lambda + 2\mathrm{i})$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(x) = A_1 \mathrm{e}^0 + A_2 \sin(2x) + A_3 \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit beliebigen Konstanten $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden machen wir den Ansatz $y_s(x) := B_1 \sin(x) + B_2 \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann gilt

$$y_s'(x) = B_1 \cos(x) - B_2 \sin(x) \quad \text{und} \quad y_s'''(x) = -B_1 \cos(x) + B_2 \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$3\cos(x) \stackrel{!}{=} (-B_1 \cos(x) + B_2 \sin(x)) + 4(B_1 \cos(x) - B_2 \sin(x)) = 3B_1 \cos(x) - 3B_2 \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $B_1 = 1$ und $B_2 = 0$, d.h. $y_s(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = \sin(x) + A_1 + A_2 \sin(2x) + A_3 \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit beliebigen Konstanten $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$.

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} y(0) = \sin(0) + A_1 + A_2 \sin(2 \cdot 0) + A_3 \cos(2 \cdot 0) = A_1 + A_3, \\ 1 &\stackrel{!}{=} y'(0) = \cos(0) + 2A_2 \cos(2 \cdot 0) - 2A_3 \sin(2 \cdot 0) = 1 + 2A_2, \\ -4 &\stackrel{!}{=} y''(0) = -\sin(0) - 4A_2 \sin(2 \cdot 0) - 4A_3 \cos(2 \cdot 0) = -4A_3, \end{aligned}$$

d.h. $A_1 = -1$, $A_2 = 0$ und $A_3 = 1$. Insgesamt erhält man also die folgende Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \sin(x) - 1 + \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

□

Aufgabe 2:

(i) Es seien $D := \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := (x\tan(y) + \sin(x),\ xy^2 + \sin(x)\mathrm{e}^y).$$

Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass f auf $U_\delta((\pi,0))$ injektiv ist. Berechnen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $(0,0)$.

(ii) Es seien $D := (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \cos(x^2)\sin(y)$. Zeigen Sie, dass g Lipschitz-stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* Es existiert ein $\delta > 0$, sodass f auf $U_\delta((\pi,0))$ injektiv ist. Ferner gilt

$$(f^{-1})'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Beweis: f ist differenzierbar auf D mit Ableitung

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \tan(y) + \cos(x) & x(1+\tan^2(y)) \\ y^2 + \cos(x)\mathrm{e}^y & 2xy + \sin(x)\mathrm{e}^y \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $f'(\pi,0) = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\det f'(0,0) = \pi \neq 0$ existiert nach dem Umkehrsatz ein $\delta > 0$ existiert, sodass f auf $U_\delta((\pi,0))$ injektiv ist. Außerdem existiert die Umkehrabbildung auf $f(U_\delta((\pi,0))$. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt $f^{-1} \in C^1(f(U_\delta((\pi,0)))$ sowie

$$(f^{-1})'(0,0) = (f^{-1})'(f(\pi,0)) = (f'(\pi,0))^{-1} = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}.$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* g ist Lipschitz-stetig.

Beweis: g ist differenzierbar auf D mit

$$g'(x,y) = (-2x\sin(x^2)\sin(y),\ \cos(x^2)\cos(y)).$$

Damit erhält man für alle $(x,y) \in D$ (Beachte: $|x| \leq \pi$):

$$\|g'(x,y)\|^2 = 4x^2\sin^2(x^2)\sin^2(y) + \cos^2(x^2)\cos^2(y) \leq 4\pi^2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4\pi^2 + 1.$$

Es seien nun $a, b \in D$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in S[a,b] \subseteq D$ (da D konvex) mit $g(b) - g(a) = g(\xi) \cdot (b-a)$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|g(b) - g(a)| = |g(\xi) \cdot (b-a)| \leq \|g'(\xi)\|\|b-a\| \leq \sqrt{4\pi^2+1}\|b-a\|,$$

d.h. g ist Lipschitz-stetig (mit Konstante $\sqrt{4\pi^2+1}$). $\square$

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $z \in \mathbb{C}$.		
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$ konvergiert absolut.	k.B.[1)]	$\operatorname{Im}(z) < 0$.
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.		
f ist differenzierbar in $(0,0)$.	$\Leftarrow$[2)]	f ist stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$.
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.		
f hat ein lokales Maximum in $(0,0)$.	$\Rightarrow$[3)]	$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$ für alle Richtungen $a \in \mathbb{R}^2$, $\lVert a \rVert = 1$.
Es seien $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.		
$(x_n, y_n) \to (x,y)$ $(n \to \infty)$.	$\Rightarrow$[4)]	$\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x,y\}$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$ sowie

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(s) := \begin{cases} \frac{\widehat{f^{(3)}}(s)}{s^2}, & s \neq 0, \\ 0 & s = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, ds$ $(t \in \mathbb{R})$.
Hinweis: f ist eine schnell fallende Funktion.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) 1) Für $z := -1$ gilt $\operatorname{Im}(z) = 0$ und $\left|\mathrm{e}^{-1}\right| < 1$, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\mathrm{e}})^n$ konvergiert absolut. Für $z := -\mathrm{i}$ gilt $\operatorname{Im}(z) = -1 < 0$ und $\left|\mathrm{e}^{-i}\right| = 1$, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ divergiert.

2) Nach der Vorlesung sind stetig partiell differenzierbare Funktionen differenzierbar. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist differenzierbar in $(0,0)$ (mit Ableitung $(0,0)$) aber nicht stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$.

3) Hat f in $(0,0)$ ein lokales Maximum, so gilt $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Somit erhält man $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\lVert a \rVert = 1$. Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ gilt $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$ für alle Richtungen $a \in \mathbb{R}^2$, $\lVert a \rVert = 1$, aber f hat in $(0,0)$ ein lokales Minimum.

4) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a-b|)$. Gilt also $(x_n, y_n) \to (x,y)$ $(n \to \infty)$, so folgt mit der Stetigkeit des Betrags

$$\max\{x_n, x_n\} = \frac{1}{2}\left(x_n + y_n + |x_n - y_n|\right) \to \frac{1}{2}(x + y + |x-y|) = \max\{x,y\} \quad (n \to \infty).$$

Für $(x_n, y_n) := ((-1)^n, 1)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $(x,y) := (1,1)$ gilt $\max\{x_n, y_n\} = 1 \to 1 = \max\{x,y\}$ $(n \to \infty)$, aber $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ ist divergent.

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, ds = -f'(t) = -2t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Beweis: Da f eine schnell fallende Funktion ist, gilt nach einem Satz aus der Vorlesung $\widehat{f^{(3)}}(s) = (\mathrm{i}s)^3\widehat{f}(s)$ $(s \in \mathbb{R})$. Somit erhält man für $s \neq 0$:

$$g(s) = \frac{\widehat{f^{(3)}}(s)}{s^2} = \frac{-\mathrm{i}s^3\widehat{f}(s)}{s^2} = -\mathrm{i}s\widehat{f}(s) = -\widehat{f}'(s).$$

Für $s = 0$ gilt ohnehin $g(0) = 0 = -\mathrm{i}0\widehat{f}(0) = -\widehat{f}'(0)$, also gilt $g(s) = -\widehat{f}'(s)$ $(s \in \mathbb{R})$. Mit der inversen Fouriertransformation erhält man somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,ds = -\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}'(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,ds = -f'(t) = -2t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}\,dx = \boxed{2}.$$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung $y^{(4)}(x) - 4y(x) = 0$:

$$\boxed{\left\{\sin(\sqrt{2}x), \cos(\sqrt{2}x), \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}\right\}}.$$

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \arctan(xy)$. Bestimmen Sie die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \boxed{\frac{1}{(1+(xy)^2)^2}\begin{pmatrix} -2xy^3 & 1-(xy)^2 \\ 1-(xy)^2 & -2x^3y \end{pmatrix}}.$$

(iv) Es seien $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ z \geq 0\right\}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := |z|\mathrm{e}^{x^2+y^2}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \boxed{\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2+1)}.$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{y(x)-2\sin(x)}$, $y(0) = 0$:

$$y(x) = \boxed{-\log\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\sin(x)}+1\right)\right)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(vi) Es sei $B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 5,\ 1 \leq x^2+y^2\right\}$. Berechnen Sie das Volumen:

$$|B| = \boxed{\frac{32}{3}\pi}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Für $\alpha > 0$ gilt

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} x\mathrm{e}^{-|x|}\,dx + 2\int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-|x|}\,dx.$$

Da $x \mapsto x\mathrm{e}^{-|x|}$ antisymmetrisch ist, folgt $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\mathrm{e}^{-|x|}\,dx = 0$ $(\alpha > 0)$ und wir erhalten

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} 2\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} 2(1-\mathrm{e}^{-\alpha}) = 2.$$

(ii) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^4 - 4 = (\lambda^2+2)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$. Damit ist ein Fundamentalsystem gegeben durch $\{\sin(\sqrt{2}x), \cos(\sqrt{2}x), \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}, \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}\}$.

(iii) f ist zweimal differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2xy^3}{(1+(xy)^2)^2} & \frac{1}{(1+(xy)^2)} - \frac{2(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2} \\ \frac{1}{(1+(xy)^2)} - \frac{2(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2} & -\frac{2x^3y}{(1+(xy)^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+(xy)^2)^2}\begin{pmatrix} -2xy^3 & 1-(xy)^2 \\ 1-(xy)^2 & -2x^3y \end{pmatrix}.$$

(iv) Mit Zylinderkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned}\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_z^{\sqrt{2}} |z|\,\mathrm{e}^{r^2} r\,dr\,d\varphi\,dz = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} z\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_z^{\sqrt{2}} dz \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{2}} z(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{z^2})\,dz = \pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2z^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z^2}\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \pi\left(\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2+1).\end{aligned}$$

(v) Mittels Trennung der Veränderlichen erhält man

$$\int \mathrm{e}^{-y}\,dy = \int \cos(x)\mathrm{e}^{-2\sin(x)}\,dx + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$-\mathrm{e}^{-y} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\sin(x)} + c \quad\Leftrightarrow\quad -y = \log\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\sin(x)} - c\right).$$

Also löst $y(x) = -\log\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\sin(x)} - c\right)$ die DGL. Einsetzen des Anfangswertes liefert

$$0 \overset{!}{=} y(0) = -\log\left(\frac{1}{2} - c\right) \quad\Rightarrow\quad c = -\frac{1}{2}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit $y(x) = -\log\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\sin(x)}+1\right)\right)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(vi) Für $z \in [-2,2]$ ist $Q(z) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 5-z^2\right\}$ ein Kreisring um $(0,0)$ mit innerem Radius 1 und äußerem Radius $\sqrt{5-z^2}$. Somit gilt $|Q(z)| = \pi(5-z^2-1) = \pi(4-z^2)$. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhält man

$$|B| = \int_{-2}^{2} |Q(z)|\,dz = \pi\int_{-2}^{2}(4-z^2)\,dz = 2\pi\left[4z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi.$$