Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

17.03.2022

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung:

$$y'''(x) - 3y''(x) + 5y'(x) - 3y(x) = 2x\mathrm{e}^x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = A\mathrm{e}^x + B\cos(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x + C\sin(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3.$$

Durch Raten findet man heraus, dass $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle von p ist. Durch Polynomdivision erhält man weiter

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1 - \sqrt{2}\mathrm{i})(\lambda - 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i} \ \vee \ \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Da das charakteristische Polynom ein komplexes Paar von Nullstellen besitzt, es aber nach einer Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht wird, bilden die drei Funktionen

$$y_1(x) := \mathrm{e}^x, \quad y_2(x) := \cos(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x, \quad \text{und} \quad y_3(x) := \sin(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, kann man den Ansatz $y_p(x) = x(A + Bx)\mathrm{e}^x = (Ax + Bx^2)\mathrm{e}^x$ wählen (beachten Sie, dass die rechte Seite der Differentialgleichung von der Form $q(x)\mathrm{e}^{\gamma x}\cos(\delta x)$ mit $\gamma = 1, \delta = 0$ und einem Polynom q ersten Grades ist, wobei $\gamma + \delta\mathrm{i} = 1$ eine einfache Nullstelle von p ist). Differenzieren von y_p ergibt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \left(A + (A + 2B)x + Bx^2\right)\mathrm{e}^x, \\ y_p''(x) &= \left(2A + 2B + (A + 4B)x + Bx^2\right)\mathrm{e}^x, \\ y_p'''(x) &= \left(3A + 6B + (A + 6B)x + Bx^2\right)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$2(A + 2Bx)\mathrm{e}^x \overset{!}{=} 2x\mathrm{e}^x.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A = 0$ und $B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\mathrm{e}^x + B\cos(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x + C\sin(\sqrt{2}x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B, C \in \mathbb{R}).$$

$\square$

Aufgabe 2:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) := \left(2x_1^2 \mathrm{e}^{y_1} - 2y_2^3, x_2 \cos(y_1) - 2x_1^2 y_2\right).$$

Zeigen Sie: Es existieren Radien $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $(x_1, x_2) \in U_\delta(1,2)$ eine eindeutige Lösung $g(x_1, x_2) \in U_\eta(0,1)$ mit

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = (0,0)$$

existiert. Berechnen Sie weiter die Ableitung der implizit definierten Funktion g im Punkt $(1,2)$, d.h. $g'(1,2)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: Es existieren Radien $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $(x_1, x_2) \in U_\delta(1,2)$ eine eindeutige Lösung $g(x_1, x_2) \in U_\eta(0,1)$ mit

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = (0,0)$$

existiert. Weiter ist g auf $U_\delta(1,2)$ stetig partiell differenzierbar und es gilt $g'(1,2) = \begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Beweis: Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, da alle Komponentenfunktionen von f stetig partiell differenzierbar sind. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert den ersten Teil der Behauptung, falls $f(x_0, y_0) = (0,0)$ und $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$ für $x_0 := (1,2)$ und $y_0 := (0,1)$ gelten. Es gilt

$$f(1,2,0,1) = (2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 - 2 \cdot 1, 2\cos(0) - 2 \cdot 1 \cdot 1) = (0,0).$$

Die Ableitung bezüglich y_1 und y_2 ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 \mathrm{e}^{y_1} & -6y_2^2 \\ -x_2 \sin(y_1) & -2x_1^2 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist -4 und damit ungleich 0. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert also den ersten Teil der Behauptung, d.h. es existieren Umgebungen $U_\delta(1,2)$ und $U_\eta(0,1)$ sowie eine eindeutige Funktion $g\colon U_\delta(1,2) \to U_\eta(0,1)$ mit $f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$ für $(x_1, x_2) \in U_\delta(1,2)$. Zudem ist g auf $U_\delta(1,2)$ stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$g'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Weiter berechnet man

$$\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0,1)\right)^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für die Ableitung nach x_1 und x_2 ergibt sich für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1, x_2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 \mathrm{e}^{y_1} & 0 \\ -4x_1 y_2 & \cos(y_1) \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$g'(1,2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $a \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung.

$\dfrac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert.	$\boxed{\Leftarrow^{1)}}$	f ist in x_0 differenzierbar.

Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^n z^n$ konvergiert.	$\boxed{\Leftrightarrow^{2)}}$	$\lvert z\rvert < 2$.

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion.

f ist beschränkt.	$\boxed{\Leftarrow^{3)}}$	D ist kompakt.

(ii) Es sei f eine schnell fallende Funktion, d.h. $f \in S$. Weiter sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_n(t) := \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ definiert. Zeigen Sie für $s \in \mathbb{R}$ mit $\lvert s\rvert < 1$ die folgende Identität:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}(s) = \frac{1}{1-\mathrm{i}s}\widehat{f}(s).$$

Hinweis: $f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ bezeichne die k-te Ableitung von f.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) 1) Wenn f in x_0 differenzierbar und a eine Richtung ist, so existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ nach Satz 18.7.
Für $x_0 = (x_1, x_2)$ definiere die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)(y-x_2)^2}{(x-x_1)^2+(y-x_2)^4}, & (x,y) \neq (x_1,x_2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ für alle Richtungen a, aber f ist in x_0 nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar.

2) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^n z^n \text{ konvergiert} \quad\Leftrightarrow\quad \left\lvert\frac{z}{2}\right\rvert < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \lvert z\rvert < 2.$$

3) Da D kompakt und f stetig ist, ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt, also inbesondere beschränkt, d.h. f ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht, wie beispielsweise die Funktion $f(x) := 1$ $(x \in \mathbb{R})$ zeigt.

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Für $s \in \mathbb{R}$ mit $\lvert s\rvert < 1$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\widehat{g_n}(s) = \frac{1}{1-\mathrm{i}s}\widehat{f}(s)$.

<u>*Beweis:*</u> Da f eine schnell fallende Funktion ist, gilt nach Satz 24.9 aus der Vorlesung für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$: $\widehat{f^{(k)}}(s) = (\mathrm{i}s)^k\widehat{f}(s)$. Mit der Linearität der Fouriertransformation folgt für $s \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{g_n}(s) = \sum_{k=0}^{n}\widehat{f^{(k)}}(s) = \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{i}s)^k\widehat{f}(s) = \widehat{f}(s)\frac{1-(\mathrm{i}s)^{n+1}}{1-\mathrm{i}s}.$$

Für $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < 1$ konvergiert der Ausdruck auf der rechten Seite und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{i}s} \widehat{f}(s).$$

$\square$

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Es sei $B := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 9 - (y - 3)^3, y \in [1, 3]\right\}$. Berechnen Sie das Volumen:

$$|B| = \boxed{22\pi}.$$

(ii) Es sei die Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) := \pi \mathrm{e}^{-|t-1|}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{g}$ von g:

$$\widehat{g}(s) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{1 + s^2}}.$$

(iii) Bestimmen Sie den Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 + \sinh(x)}{1 + x^2}\, dx = \boxed{2\pi}.$$

(iv) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y^{(4)}(x) - y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) = 0$:

$$\boxed{\left\{1, \mathrm{e}^x, \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x)\right\}}.$$

(v) Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := \mathrm{e}^x x^2 \cos(y^2)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $a := \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}(1, \sqrt{e - 1})$:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1, 0) = \boxed{3\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

(vi) Es sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \leq 1, 0 \leq y \leq |x|\}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M x + y^2 \, d(x, y) = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Setze

$$\widetilde{B} = \left\{(r, \varphi, y) \in \mathbb{R}^3 \colon (y, \varphi) \in [1, 3] \times [0, 2\pi], 0 \leq r \leq \sqrt{9 - (y - 3)^3}\right\}.$$

Durch Übergang zu Zylinderkoordinaten und da $\widetilde{B}$ ein Normalbereich ist, erhält man

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_B d(x, y, z) = \int_{\widetilde{B}} r \, d(r, \varphi, y) = \int_1^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{9-(y-3)^3}} r \, dr \, d\varphi \, dy \\
&= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(9 - (y - 3)^3) \, d\varphi \, dy = \pi \int_1^3 9 - (y - 3)^3 \, dy \\
&= \pi \left[9y - \frac{1}{4}(y - 3)^4\right]_1^3 = 22\pi.
\end{aligned}$$

(ii) Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := \mathrm{e}^{-|t|}$. Damit gilt $g(t) = \pi f(t-1)$ $(t \in \mathbb{R})$. Für die Fouriertransformierte gilt:

$$\hat{g}(s) = \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} \hat{f}(s) = \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} \cdot \frac{1}{\pi(1+s^2)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{1+s^2} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

(iii) Der Sinus hyperbolicus ist eine ungerade Funktion. Für $\alpha > 0$ folgt daher:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{2+\sinh(x)}{1+x^2}\,dx &= \int_{-a}^{a} \frac{2}{1+x^2}\,dx = [2\arctan(x)]_{-a}^{a} = 2(\arctan(a) - \arctan(-a)) \\ &\xrightarrow{a\to\infty} 2\pi,\end{aligned}$$

d.h. der Cauchysche Hauptwert existiert und hat den Wert 2π.

(iv) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2+2)$. Die Nullstellen sind also $\{0, 1, \pm\sqrt{2}\mathrm{i}\}$. Folglich ist ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung gegeben durch

$$\left\{1, \mathrm{e}^x, \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x)\right\}.$$

(v) Die Funktion f ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\mathrm{e}^x x \cos(y^2)(x+2), -2\mathrm{e}^x x^2 y \sin(y^2)\right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Somit existiert die Richtungsableitung im Punkt $(1,0)$ in Richtung a und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,0) = \operatorname{grad} f(1,0) \cdot a = 3\mathrm{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = 3\sqrt{\mathrm{e}}.$$

(vi) Es gilt

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \le x \le 1, 0 \le y \le |x|\right\},$$

insbesondere ist M ein Normalbereich bzgl. der x-Achse und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_M x + y^2\,d(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_0^{|x|} x + y^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{|x|} dx = \int_{-1}^{1} x\,|x| + \frac{1}{3}\,|x|^3\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$