Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die Lösung des AWP lautet

$$y(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(2x) - \sin(2x) \\ \cos(2x) + \sin(2x) \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Wir berechnen zunächst ein zugehöriges Fundamentalsystem. Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

A hat also die Eigenwerte $1+2\mathrm{i}$ und $1-2\mathrm{i}$. Der zu $1+2\mathrm{i}$ gehörige Eigenraum lautet

$$E_{1+2\mathrm{i}} = [\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}].$$

(Beachte: $E_{1-2\mathrm{i}}$ wird nicht benötigt). Daraus erhalten wir das zugehörige Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ bestehend aus

$$y_1(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Wir bestimmen also $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entsprechend der Anfangsbedingungen und erhalten $c_1 = c_2 = 1$, also

$$y(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos(2x) - \sin(2x) \\ \cos(2x) + \sin(2x) \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

□

Aufgabe 2:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt ein Symbol, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(I)$, F eine Stammfunktion von f auf I und $y \colon I \to \mathbb{R}$.

$y'(x) = f(x)y(x)$ $(x \in I)$.	$\Leftarrow^{1)}$	Es existiert ein $c \geq 0$ mit $y(x) = c\mathrm{e}^{F(x)}$ $(x \in I)$.

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Es existiert ein $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0,0) - a \cdot h}{\|h\|} = 0$.	$\Rightarrow^{2)}$	f ist stetig in $(0,0)$.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar.

$\lvert B \rvert \leq 2^n$.	$\Leftarrow^{3)}$	$B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

$B \cap [0,\infty)^n$ ist abgeschlossen.	$\Leftarrow^{4)}$	B ist abgeschlossen.

(ii) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schnell fallend und antisymmetrisch, d.h. es gilt $f(t) = -f(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Ableitung $\widehat{f'}$ reellwertig ist, d.h. $\widehat{f'}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) 1) Nach Satz 21.2 a) (i) löst $y(x) = c\mathrm{e}^{F(x)}$ $(x \in I)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $y'(x) = f(x)y(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, also insbesondere für $c \geq 0$. Ist umgekehrt y eine Lösung der DGL so muss c nicht notwendigerweise größer gleich 0 sein.

2) Nach Vorlesung sind differenzierbare Funktionen stetig, aber im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht.

3) Ist $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$ so folgt mit Satz 14.1 h) $|x_i| \leq \|x\| \leq 1$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ und somit $|B| \leq 2^n$. Umgekehrt erfüllt $B := [2,4]^n$ ebenfalls $|B| = 2^n$ aber es gilt $B \not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$.

4) $[0,\infty)^n$ ist abgeschlossen. Ist nun B abgeschlossen, so ist auch $B \cap [0,\infty)^n$ als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Umgekehrt ist für $B = (-1,0]^n$ die Menge $B \cap [0,\infty)^n = \{0\}$ abgeschlossen, aber B selbst ist nicht abgeschlossen.

(ii) *Behauptung:* $\widehat{f'}$ ist reellwertig.

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt (mittels Substitution)

$$-\hat{f}(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{=-f(-t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\, dt} = \overline{\hat{f}(s)}.$$

Multiplizieren mit $-\mathrm{i}s$ ergibt $\mathrm{i}s\hat{f}(s) = -\mathrm{i}s\overline{\hat{f}(s)} = \overline{is\hat{f}(s)}$. Mit Satz 24.9 folgt $\widehat{f'} = \overline{\widehat{f'}}$, d.h. $\widehat{f'} \in \mathbb{R}$. Da s beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 3:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (xy\cos(z)^2 + x^3 - 1,\, x^2\sin(y) + \mathrm{e}^{z-\pi} - 1).$$

Zeigen Sie, dass $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(\pi) \to U_\eta((1,0))$ existieren mit $g(\pi) = (1,0)$ und $f(g(z),z) = 0$ $(z \in U_\delta(\pi))$. Berechnen Sie außerdem $g'(\pi)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: Es existieren $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(\pi) \to U_\eta((1,0))$ mit $g(\pi) = (1,0)$ und $f(g(z),z) = 0$ $(z \in U_\delta(\pi))$.

Beweis: Es gilt $f(1,0,\pi) = 0$. Außerdem ist f stetig differenzierbar nach der Kettenregel mit

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\cos(z)^2 + 3x^2 & x\cos(z)^2 & -2xy\cos(z)\sin(z) \\ 2x\sin(y) & x^2\cos(y) & \mathrm{e}^{z-\pi} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,0,\pi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit $\det\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,0,\pi)\right) = 3 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren also $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(\pi) \to U_\eta((1,0))$ mit $g(\pi) = (1,0)$ und $f(g(z),z) = 0$ $(z \in U_\delta(\pi))$. □

Behauptung: $g'(\pi) = (\frac{1}{3}, -1)$

Beweis: Ebenfalls nach dem Satz über implizit definierte Funktionen ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(g(z),z)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(g(z),z) \quad (z \in U_\delta(\pi)).$$

Mit $g(\pi) = (1,0)$ folgt

$$g'(\pi) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} x^3 + \frac{1}{1+x^2}\,dx = \boxed{\pi}.$$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung $y^{(5)}(x) - 9y'(x) = 0$:

$$\boxed{\left\{1, \mathrm{e}^{\sqrt{3}x}, \mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}, \sin(\sqrt{3}x), \cos(\sqrt{3}x)\right\}}.$$

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \log(x^2+y^2)$. Bestimmen Sie die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \boxed{-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}}.$$

(iv) Es seien $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \boxed{\pi\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)}.$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y''(x) - y(x) = \cos(x)$, $y(0) = y'(0) = \frac{1}{2}$:

$$y(x) = \boxed{\frac{3}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(vi) Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sin(x)\cos(y)$ und $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial a}\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} x^3 + \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \arctan(x)\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \alpha^4 + \arctan(\alpha) - \alpha^4 - \arctan(-\alpha) \\ &= 2\arctan(\alpha) \to \pi \quad (\alpha \to \infty).\end{aligned}$$

(ii) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^4 - 9) = \lambda(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3}\mathrm{i})(\lambda-\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

Damit ergibt sich das Fundamentalsystem $\left\{1, \mathrm{e}^{\sqrt{3}x}, \mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}, \sin(\sqrt{3}x), \cos(\sqrt{3}x)\right\}$.

(iii) f ist zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit 2. Ableitung

$$H_f(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(iv) Mittels Kugelkoordinaten erhält man

$$(r\cos(\varphi)\cos(\theta),\ r\sin(\varphi)\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) \in M \quad \Leftrightarrow \quad r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\pi],\ \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\mathrm{e}^{-r^2} r^2 \cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi\,dr \\ &= \pi\left(\int_0^1 r^3 \mathrm{e}^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,d\theta\right) \\ &= \pi\left(\int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{e}^{-r^2}\,dr\right)\underbrace{\Big[\sin(\theta)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=2}.\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{e}^{-r^2}\,dr = \left[r^2\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 r\mathrm{e}^{-r^2}\,dr = -\frac{1}{2\mathrm{e}} + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

(v) Die allgemeine Lösung des homogenen Problems lautet $y_h(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mit dem Ansatz aus der Vorlesung findet man eine spezielle Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$. Einsetzen der Anfangswerte ergibt die Lösung $\frac{3}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(vi) f ist differenzierbar mit $f'(x,y) = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y))$. Somit ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial a}\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot (1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$