Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y(x), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 2:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \Big(y\arctan(x) - z^2\cos(y), e^{\pi-2y}(x+z) - 2\Big).$$

Zeigen Sie: Es existieren $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $z \in U_\delta(2)$ eine eindeutige Lösung $(x,y) = g(z) \in U_\eta((0, \frac{\pi}{2}))$ von

$$f(x,y,z) = 0$$

existiert. Bestimmen Sie weiter $g'(2)$.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text “keine Beziehung” in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

D ist kompakt		$f(D)$ ist kompakt.

Es seien $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$f'(x_0) = 0$ und $\det H_f(x_0) > 0$		f besitzt in x_0 ein Extremum.

Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^{2n} z^n$ konvergiert		$\lvert z\rvert < \frac{1}{2}$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine schnell fallende Funktion. Für $h \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_h(t) \coloneqq f(t+h)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{4} \widehat{\left(f_{k\pi/5}\right)}(2) = 0.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH\text{–}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{}.$$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y'''(x)+3y''(x)+3y'(x)+y(x)=0$:

$$\boxed{}.$$

(iii) Es sei $B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\in[0,5], -3\le y\le x^2-4x\}$. Berechnen Sie die Fläche:

$$|B| = \boxed{}.$$

(iv) Es seien $f\colon(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x,y)=x^y$ und $a\in\mathbb{R}^2$, $\|a\|=1$, eine Richtung. Berechnen Sie folgende Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = \boxed{}.$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x)=x\sin(x^2)(1+y(x)^2)$, $y(0)=0$.

$$y(x) = \boxed{} \text{ für } x\in\mathbb{R}.$$

(vi) Es sei $M := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0\}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M \frac{z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \boxed{}.$$

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Sommersemester 2022

21. März 2023

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y(x), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die Lösung y des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \\ \cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sei $A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A: Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 3$$

mit Nullstellen $2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$; dies sind die Eigenwerte von A. Den Eigenvektor zum Eigenwert $2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ erhalten wir als:

$$\operatorname{kern}(A - (2+\mathrm{i}\sqrt{3})I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{3} & 3 \\ -1 & -\mathrm{i}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right].$$

Hieraus lesen wir ab, dass

$$\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i}\sqrt{3})x} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}(\cos(\sqrt{3}x) + \mathrm{i}\sin(\sqrt{3}x)) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) \\ -\sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \\ \cos(\sqrt{3}x) \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialrechnung $y'(x) = Ay(x)$ ist. Deren Real- und Imaginärteil bilden ein Fundamentalsystem des Lösungsraumes. Die allgemeine reelle Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ ist also gegeben durch

$$y(x) \coloneqq c_1 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) \\ -\sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \\ \cos(\sqrt{3}x) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit y das Anfangswertproblem löst, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} y(0) = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

woraus wir $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $c_2 = 1$ ablesen. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) \\ -\sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \\ \cos(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) \\ \cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 2:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \big(y\arctan(x) - z^2\cos(y), e^{\pi-2y}(x+z) - 2\big).$$

Zeigen Sie: Es existieren $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $z \in U_\delta(2)$ eine eindeutige Lösung $(x,y) = g(z) \in U_\eta((0,\frac{\pi}{2}))$ von

$$f(x,y,z) = 0$$

existiert. Bestimmen Sie weiter $g'(2)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: Es existieren $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $z \in U_\delta(2)$ eine eindeutige Lösung $(x,y) = g(z) \in U_\eta((0,\frac{\pi}{2}))$ von

$$f(x,y,z) = 0$$

existiert. Weiter gilt

$$g'(2) = \frac{-1}{1+\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Funktion f ist stetig differenzierbar als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen. Für die Ableitung berechnen wir:

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{1+x^2} & \arctan(x) + z^2\sin(y) & -2z\cos(y) \\ e^{\pi-2y} & -2e^{\pi-2y}(x+z) & e^{\pi-2y} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gelten

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,\tfrac{\pi}{2},2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,\tfrac{\pi}{2},2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Matrix hat Determinante $\det\Big(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,\frac{\pi}{2},2)\Big) = -4(1+\frac{\pi}{2}) \neq 0$, ist somit invertierbar. Die Inverse ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,\tfrac{\pi}{2},2)\right)^{-1} = \frac{1}{4(1+\frac{\pi}{2})}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Zudem gilt $f(0,\frac{\pi}{2},2) = (\frac{\pi}{2}\arctan(0) - 4\cos(\frac{\pi}{2}), e^0(0+2)-2) = (0,0)$. Somit ist der Satz über implizit definierte Funktionen aus der Vorlesung anwendbar und liefert die Existenz von $\delta, \eta > 0$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $g\colon U_\delta(2) \to U_\eta((0,\frac{\pi}{2}))$ mit den in der Behauptung geforderten Eigenschaften, und es gilt

$$g'(2) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,\tfrac{\pi}{2},2)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial z}(0,\tfrac{\pi}{2},2) = \frac{-1}{1+\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

D ist kompakt	$\Longrightarrow$ (a)	$f(D)$ ist kompakt.

Es seien $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$f'(x_0) = 0$ und $\det H_f(x_0) > 0$	$\Longrightarrow$ (b)	f besitzt in x_0 ein Extremum.

Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^{2n} z^n$ konvergiert	$\Longleftrightarrow$ (c)	$\lvert z\rvert < \frac{1}{2}$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine schnell fallende Funktion. Für $h \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f_h(t) := f(t+h)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{4} \widehat{\left(f_{k\pi/5}\right)}(2) = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) (a) Zu $\Rightarrow$: Folgt aus Satz 16.5(b) (i) in der Vorlesung .
Zu $\Leftarrow$: Als Gegenbeispiel betrachte $D = \mathbb{R}^n$ und als f die konstante Nullfunktion.

(b) Zu $\Rightarrow$: Da $\det H_f(x_0) > 0$ ist, haben beide Eigenwerte von $H_f(x_0)$ das gleiche Vorzeichen. Somit ist $H_f(x_0)$ positiv definit (falls beide Eigenwerte positiv sind) oder negativ definit (falls beide Eigenwerte negativ sind). Nach Satz 18.10 aus der Vorlesung hat f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.
Zu $\Leftarrow$: Als Gegenbeispiel betrachte $f(x,y) = x^4 + y^4$.

(c) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^{2n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1+\mathrm{i})^2 z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2\mathrm{i}z)^n$$

eine geometrische Reihe, die nach Vorlesung genau dann konvergiert, wenn $\lvert 2\mathrm{i}z\rvert < 1$ gilt; also genau dann, wenn $\lvert z\rvert < \frac{1}{2}$.

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\sum_{k=0}^{4} \widehat{\left(f_{k\pi/5}\right)}(2) = 0$.

Beweis: Wir verwenden die Darstellung der Fouriertransformierten der verschobenen Funktion f_h, vergleiche Satz 24.5 (b) aus der Vorlesung: Es gilt $\widehat{f_h}(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sh} \hat{f}(s)$ für $s, h \in \mathbb{R}$. Damit berechnen wir

$$\sum_{k=0}^{4} \widehat{\left(f_{k\pi/5}\right)}(2) = \hat{f}(2) \sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi/5} = \hat{f}(2) \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} - 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5} - 1} = 0,$$

wobei wir im zweiten Schritt die geometrische Summenformel verwendet haben. □

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} (1+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\sqrt{\pi}}.$$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y'''(x)+3y''(x)+3y'(x)+y(x)=0$:

$$\boxed{\left\{\mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}, x^2\mathrm{e}^{-x}\right\}}.$$

(iii) Es sei $B := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,5], -3\le y\le x^2-4x\right\}$. Berechnen Sie die Fläche:

$$|B| = \boxed{8}.$$

(iv) Es seien $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x,y)=x^y$ und $a\in\mathbb{R}^2$, $\|a\|=1$, eine Richtung. Berechnen Sie folgende Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = \boxed{a\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\log(2)\end{pmatrix} = a_1 + 2\log(2)a_2}.$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = x\sin(x^2)(1+y(x)^2)$, $y(0)=0$.

$$y(x) = \boxed{\tan\left(\frac{1-\cos(x^2)}{2}\right)} \text{ für } x\in\mathbb{R}.$$

(vi) Es sei $M := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0\right\}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M \frac{z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \boxed{\frac{\pi(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})}{2}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* Es gilt $CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Beweis: Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \sin(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ ist ungerade in x. Somit gilt

$$CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\sin(x))\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

wobei wir für die letzte Gleichheit Beispiel (b) auf Seiten 54-55 im HM2 Skript verwendet haben. □

(ii) *Behauptung:* Ein Fundamentalsystem von $y'''(x)+3y''(x)+3y'(x)+y(x)=0$ ist gegeben durch $\left\{\mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}, x^2\mathrm{e}^{-x}\right\}$.

Beweis: Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $p(\lambda) = \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 = (1+\lambda)^3$ und die dreifache Nullstelle -1. Nach Vorlesung bilden e^{-x}, $x\mathrm{e}^{-x}$ und $x^2\mathrm{e}^{-x}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. □

Bemerkung: Die Mengenklammern im Ergebnis dürfen auch weggelassen werden.

(iii) *Behauptung:* Für $B := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,5], -3\le y\le x^2-4x\right\}$ gilt $|B| = 8$.

Beweis: Es gilt $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$, also $x^2 - 4x \geq 3 \iff (x-2)^2 \geq -3 \iff x \notin (1,3)$. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_{[0,5]\setminus(1,3)} x^2 - 4x - (-3)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x-2)^2 - 1\,\mathrm{d}x + \int_3^5 (x-2)^2 - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 - x\right]_3^5 \\
&= \frac{1}{3}(-1 + 8 + 27 - 1) - 3 = 8.
\end{aligned}$$

□

(iv) *Behauptung:* Für $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ und $a \in \mathbb{R}^2$, $\|a\| = 1$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\log(2) \end{pmatrix} = a_1 + 2\log(2)a_2.$$

Beweis: Es gilt $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\log(x)}$, also ist f differenzierbar. Weiter ist

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{y\log(x)}\frac{y}{x} & \mathrm{e}^{y\log(x)}\log(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y\cdot x^y}{x} & x^y\log(x) \end{pmatrix},$$

also insbesondere $f'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2\log(2) \end{pmatrix}$. Nach Satz 18.7 aus der Vorlesung gilt weiter

$$\frac{\partial f}{\partial a}(2,1) = a \cdot f'(2,1)^\top = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\log(2) \end{pmatrix} = a_1 + 2\log(2)a_2.$$

□

(v) *Behauptung:* Die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = x\sin(x^2)(1+y(x)^2)$, $y(0) = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = \tan\left(\frac{1-\cos(x^2)}{2}\right).$$

Beweis: Wir können die Differentialgleichung mit der Methode "Trennung der Veränderlichen" lösen. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
& y'(x) = x\sin(x^2)(1+y(x))^2, y(0) = 0 \\
\implies & \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = x\sin(x^2), y(0) = 0 \\
\implies & [\arctan(s)]_{y(0)}^{y(x)} = \left[\tfrac{-1}{2}\cos(t^2)\right]_0^x, y(0) = 0 \\
\implies & \arctan(y(x)) = \frac{1-\cos(x^2)}{2} \\
\implies & y(x) = \tan\left(\frac{1-\cos(x^2)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{1-\cos(x^2)}{2} \in [0,1]$ liegt, also auch im Definitionsbereich des Tangens, weswegen wir $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $y(x) = \tan\left(\frac{1-\cos(x^2)}{2}\right)$ definieren können. Durch nachrechnen kann man zeigen, dass dieses y tatsächlich das gesuchte Anfangswertproblem löst. □

(vi) *Behauptung:* Für $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ gilt

$$\int_M \frac{z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{\pi(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})}{2}.$$

Beweis: Wir verwenden Kugelkoordinaten $x = r\cos(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $z = r\sin(\vartheta)$ mit $r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann gilt $(x, y, z) \in M \iff r \in [1, 2], \vartheta \geq 0$. Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin(\vartheta)\mathrm{e}^{r^2}}{r^2} r^2 \cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_1^2 r\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_1^2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2}\sin(\vartheta)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})}{2}.
\end{aligned}$$

□