Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Artem Nepechiy
Dr. Philippe Kupper

Lineare Algebra 1 für die Fachrichtung Informatik
Wintersemester 25/26
Übungsblatt Nr. 2

Name und Matrikelnummer:

. . . .

. . . .

. . . .

5	6	7	8	$\sum$	Tut.

Aufgabe 5 (Mengen und Abbildungen) (6 Punkte)

Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Weiter seien $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; und Gleichheit, falls f injektiv ist. Geben Sie außerem ein konkretes Beispiel an, in dem Gleichheit nicht gilt.

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$; und Gleichheit, falls f injektiv ist. Geben Sie außerem ein konkretes Beispiel an, in dem Gleichheit nicht gilt.

Aufgabe 6 (Komposition von Abbildungen) (6 Punkte)

Seien $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to C$. Sei $g \circ f \colon A \to C$ die Abbildung, die definiert ist durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in A.$$

Man zeige:

(a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f \colon A \to C$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f \colon A \to C$ surjektiv.

(c) Wenn f nicht injektiv ist, dann ist $g \circ f \colon A \to C$ nicht injektiv.

(d) Wenn g nicht surjektiv ist, dann ist $g \circ f \colon A \to C$ nicht surjektiv.

Aufgabe 7 (Funktionen konkret) (6 Punkte)

Sind folgende Funktionen injektiv,surjektiv,bijektiv? Im Falle Bijektivität, geben Sie auch die Umkehrabbildung an.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$.

(b) $f_2 : [0, 1] \to [1, 2], \quad x \mapsto 1 + \frac{x^2}{2}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$.

(d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.

(e) $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Handgeschriebene Lösungen können bis **8:00 Uhr am Freitag, dem 14. November 2025,** auf ILIAS abgeben werden.

Aufgabe 8 (Matrixmultiplikation) (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Finden Sie eine Formel für

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

und beweisen Sie diese induktiv.